

## 9. Übungsblatt

**Ausgabe:** 10.6.2005    **Abgabe:** 17.6.2005, 10 Uhr  
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

### Aufgabe 1: Stochastische Matrizen

6 Punkte

Eine Matrix  $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *stochastisch*, falls  $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  
Zeigen Sie:

- (a)  $\left| \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right| \leq \max_{j=1, \dots, n} |x_j|$  für alle  $x \in \mathbb{C}^n$  und  $i = 1, \dots, n$ .  
(b)  $\rho(M) = 1$ .

### Aufgabe 2: Inzidenzmatrix

8 Punkte

Die *Inzidenzmatrix*  $I(G) = (i_{v,e})_{v \in V, e \in E}$  eines schlichten, ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist definiert durch

$$i_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in e, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Überprüfen Sie die folgenden Beziehungen zwischen der Inzidenzmatrix und den Adjazenzmatrizen des Graphen und seines Kantengraphen  $\mathcal{E}(G)$  (dabei bezeichnet  $D(G)$  die Diagonalmatrix der Knotengrade und  $I$  die Diagonalmatrix mit Einsen auf der Diagonalen):

- (a)  $I(G) \cdot I(G)^T = D(G) + A(G)$   
(b)  $I(G)^T \cdot I(G) = 2 \cdot I + A(\mathcal{E}(G))$

Können Sie diese Beziehungen verallgemeinern (z.B. auf gerichtete Graphen)?

### Aufgabe 3: Kantengraphen

6 Punkte

Zeigen Sie, dass der Kantengraph eines  $k$ -fach kantenzusammenhängenden Graphen  $k$ -fach knotenzusammenhängend ist. Gilt die Umkehrung ebenfalls?