Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Ulrik Brandes / Melanie Badent und Krists Boitmanis

Letztes Übungsblatt

Ausgabe: 05.07.2007 **Abgabe:** 12.07.2007, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 40: transitive Hülle — 6 Punkte

Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Ist

$$A^T = \{(v, w);\ \text{ es gibt einen gerichteten Pfad in } G \text{ von } v \text{ nach } w\},$$

so heißt $G^T = (V, A^T)$ die *transitive Hülle* von G.

Eine *transitive Reduktion* von G ist ein Graph H mit der kleinsten Anzahl von Kanten, so dass

$$H^T = G^T \tag{1}$$

gilt. Ein *minimales Äquivalent* von G ist der kleinste Teilgraph H von G für den (1) gilt.

(a) Ist eine transitive Reduktion eines gerichteten Graphen immer eindeutig?

(b) Ist ein minimales Äquivalent eines gerichteten Graphen immer eine transitive Reduktion des gleichen Graphen?

(c) Seien $G_1 = (V, A_1)$ und $G_2 = (V, A_2)$ zwei kreisfreie, gerichtete Graphen mit der gleichen Knotenmenge V, so dass gilt: $G_1^T = G_2^T$. Zeigen Sie: Wenn es eine Kante $e \in A_1$ gibt, so dass $e \notin A_2$, dann ist $(G_1 \setminus e)^T = G_1^T = G_2^T$.

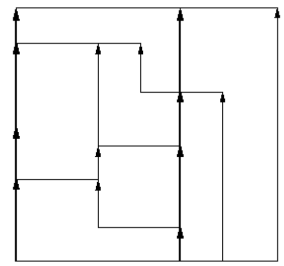
Aufgabe 41: constrained visibility — 8 Punkte

Sei G ein planarer st-Graph (Definition siehe Aufgabe 24) und F seine Facetten. Zwei Pfade π_1 und π_2 von G *kreuzen* sich nicht, wenn es keinen Knoten v aus G gibt mit Kanten e_1, e_2, e_3 und e_4 inzident zu v und die in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn um v vorkommen, so dass e_1 und e_3 zu π_1 und e_2 und e_4 zu π_2 gehören.

Wir betrachten das Problem, eine Sichtbarkeitsrepräsentation von G zu konstruieren, so dass für alle Pfade π aus einer Menge von sich nicht kreuzenden Pfaden Π, die Kanten von π vertikal auf einer Linie liegen. Genauer: Für je zwei Kanten e' und e'' von π haben die Kantensegmente $\Gamma(e')$ und $\Gamma(e'')$ die gleiche x-Koordinate.

[Bitte wenden]

Nebenstehender Graph zeigt ein Beispiel für eine solche Sichtbarkeitsrepräsentation. Dabei sind zwei vertikal auf einer Linie liegende Pfade von der Quelle zur Senke dick eingezeichnet. Um die Beschreibung des folgenden Algorithmus zu vereinfachen, nehmen wir ohne Einschränkung an, dass die Menge Π von sich nicht kreuzenden Pfaden die ganze Kantenmenge von G überdeckt.



Zusätzlich führen wir folgende Notationen ein: Die y-Koordinate von den Endpunkten eines Knotensegments $\Gamma(v)$ wird mit $y(\Gamma(v))$ bezeichnet; die x-Koordinaten des linken bzw. rechten Endpunktes von $\Gamma(v)$ mit $x_L(\Gamma(v))$ bzw. $x_R(\Gamma(v))$. Auf die gleiche Weise werden die Koordinaten der Kantensegmente definiert. Die x-Koordinate eines Kantensegmentes $\Gamma(e)$ wird mit $x(\Gamma(e))$ bezeichnet; die y-Koordinaten des oberen bzw. unteren Endpunktes von $\Gamma(e)$ mit $y_T(\Gamma(e))$ bzw. $y_B(\Gamma(e))$. Weiterhin bezeichnet $left(v)$ bzw. $right(v)$ für einen Knoten v die Facetten, welche die eingehenden von den ausgehenden Kanten trennen.

Algorithmus:
Input: planarer st-Graph, Menge Π von sich nicht kreuzenden Pfaden, die die Kantenmenge von G überdeckt
Output: Sichtbarkeitsrepräsentation Γ von G, so dass für jeweils zwei Kanten e' und e'' im gleichen Pfad π von Π gilt: $x(\Gamma(e')) = x(\Gamma(e''))$

(a) Konstruiere Graph G_Π mit Knotenmenge $F \cup \Pi$ und Kantenmenge $\{(f, \pi) \mid f = left(e)$ für Kante e von $\pi\} \cup \{(\pi, g) \mid g = right(e)$ für Kante e von $\pi\}$.

(b) Berechnen Sie eine topologische Ordnung Y von G.

(c) Berechnen Sie eine topologische Ordnung X von G_Π.

(d) Zeichnen Sie jeden Knoten v als horizontales Segment mit $y(\Gamma(v)) = Y(v)$; $x_L(\Gamma(v)) = Y(left(v))$; $x_R(\Gamma(v)) = Y(right(v))$.

(e) Zeichnen Sie jede Kante e von π mit $x(\Gamma(e)) = X(\pi)$; $y_B(\Gamma(e)) = Y(orig(e))$; $y_T(\Gamma(e)) = Y(dest(e))$.

Zeigen Sie:

(a) Der Graph G_Π, der mit obigen Algorithmus in Schritt (a) konstruiert wurde, ist ein planarer st-Graph.

(b) Der Algorithmus berechnet eine Sichtbarkeitsrepräsentation.

(c) Welche Laufzeit und welchen Platzbedarf hat der Algorithmus? Durch welche Änderung im Algorithmus kann ein Platzbedarf von $\mathcal{O}(n^2)$ garantiert werden?

Aufgabe 42: Entfernen von Kreisen **6 Punkte**

Implementieren Sie Algorithmus 5 und 6 des Skriptes (S. 81-82) und vergleichen Sie die Größe der kreisfreien Kantenmengen, die durch die Algorithmen zurückgegeben werden, wenn die Algorithmen auf zufällige gerichtete Graphen angewendet werden. Geben Sie Ihr Programm und die Ergebnisse in irgendeiner Form ab.