

Universität Konstanz
Fachbereich Informatik und Informationswissenschaften

Prof. Dr. Ulrik Brandes
Seminar: Methoden der Netzwerkanalyse
Betreuer: Martin Hofer

Der *price of anarchy* für dezentral geplante Netzwerke

Ausarbeitung basierend auf *On a Network Creation Game* von
A. Fabrikant, A. Luthra, E. Maneva, C. Papadimitriou, S. Shenker,
Proceedings of PODC 2003

von
Bobo Nick
Bobo.Nick@uni-konstanz.de

Konstanz, 29.11.2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Spieltheoretische Grundlagen	2
3	Der <i>price of anarchy</i>	3
4	Das Modell	4
5	Grundlegende Resultate im UCG	5
5.1	Fall $\alpha < 1$	6
5.2	Fall $1 \leq \alpha < 2$	6
5.3	Fall $\alpha \geq 2$	6
6	Obere Schranken im UCG	7
6.1	Fall $\alpha \geq n^2$	7
6.2	Fall $2 \leq \alpha < n^2$	8
6.3	Tabellarische Zusammenfassung	10
7	Die Baumvermutung	10
8	Verbesserte Schranken	11
9	Untere Schranke im UCG	13
10	Ausblick	15

1 Einleitung

Das weltumspannende Netzwerk des Internet wurde nicht durch eine einzelne Kraft ersonnen, sondern ist vielmehr das Resultat dezentralisierter, unkoordinierter und spontaner Interaktion verschiedener wirtschaftlicher Interessen.

Mit diesem Hintergedanken fragen E. Koutsoupias und C. Papadimitriou „*How much performance is lost because of this [lack of coordination]?*“ [1] und motivieren den *price of anarchy* [2] - das Verhältnis zwischen der für die Allgemeinheit ungünstigsten stabilen dezentralen Lösung und dem sozialen Optimum - als eine (mittlerweile anerkannte) Methode der Netzwerkanalyse hinsichtlich der Effektivität eines dezentral geplanten Systems.

Während sich Papadimitriou und Koutsoupias auf die Analyse der Verzögerung eines dezentral gesteuerten Datenflusses über mehrere Leitungen (Kanten) zwischen zwei Knoten beschränken, machen A. Fabrikant et al. [3] mit ihrem *Unilateral Connection Game (UCG)* einen ersten Versuch, die Entstehung eines dezentral geplanten Netzwerkes zu simulieren: Nicht-kollegial agierende Spieler (Knoten) bauen untereinander Verbindungen (Kanten). Für die Berechnung des *price of anarchy* werden die Kosten für Kantenbau und minimale Knotenentfernungen betrachtet.

Um der Realität und der Komplexität des Internets gerecht(er) zu werden, stehen seither immer differenziertere Modelle im Focus der Wissenschaft¹. Beispielsweise machen J. Corbo und D. Parkes in ihrem *Bilateral Connection Game (BCG)* [4] das Einvernehmen der beteiligten Knoten für die Entstehung einer Kante zur Bedingung und teilen die Kosten zwischen den Akteuren auf.

Doch selbst in den einfachsten Modellen erweist sich die Feststellung des *price of anarchy* und die Vorhersage von Netzwerkstrukturen als schwierig. Erst jüngst [5] wurde die von Fabrikant et al. aufgestellte Vermutung widerlegt, dass alle stabilen dezentral entstehenden Netzwerke des UCG ab einem gewissen Preis für den Kantenbau eine Baumstruktur aufweisen. . .

Hier folgt, nach der Einführung in die zentralen Begriffe, die Betrachtung der Resultate der genannten Quellen über den *price of anarchy* für dezentral geplante Netzwerke.

¹Christos H. Papadimitriou postuliert in [2] die großen Ziele:

„*Develop a graph generation model for the world-wide-web, plausibly capturing key aspects at a primitive level [...], that predicts theoretically the observed characteristics of the web graph.*“

„*Develop a reasonably faithful game-theoretic model of Internet congestion control for which (an approximation of) TCP/IP is a Nash equilibrium.*“

2 Spieltheoretische Grundlagen

Bevor wir zeigen, wie uns die Spieltheorie passende Modelle für eine mathematische Analyse des *price of anarchy* in dezentral geplanten Netzwerken liefert, seien hier kurz die benötigten Grundlagen zusammengefasst:

Allgemeine Definitionen

In einem **Spiel** wählt jeder der n **Spieler** aus einer Menge von möglichen Zügen S_i , $i = 1, \dots, n$. Jeder mögliche Zug $x_i \in S_i$ stellt eine (**reine**) **Strategie** von Spieler i dar. **Nutzenfunktionen** u_i , $i = 1, \dots, n : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ ordnen jedem Spieler seinen **pay off** (Gewinn/Verlust) in Abhängigkeit der gewählten Strategien zu.

Nash-Gleichgewichte

Die Spieltheorie liefert nun auf die Frage, wie sich die Spieler verhalten (sollten), folgendes Konzept für stabile Konfigurationen der Strategiewahlen:

Ein (**reines**) **Nash-Gleichgewicht** ist eine Kombination aus (reinen) Strategien $x_1 \in S_1, \dots, x_n \in S_n$ für die gilt:

$$u_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \geq u_i(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \text{ für alle } i \text{ und } x'_i \in S_i.$$

In Worten: „Kein Spieler hat einen Vorteil, wenn er alleine von seiner Strategie abweicht (und verhält sich somit rational)“.

BEISPIEL: *Das Gefangenendilemma*

Ein berühmtes *Paradoxon* der Spieltheorie (für unseren Kontext formuliert):

Zwei Gefangenen A und B wird getrennt von einander der Prozess gemacht. Den Juristen⁸Gefangenen ist die Sachlage klar: Sind beide geständig bekommen sie strafmildernd jeweils 4 Jahre Haft. Schweigen beide, so können beide aufgrund von Indizien nur 2 Jahre eingesperrt werden. Ein einseitiges Geständnis kostet dem Geständigen nur ein Jahr Freiheitsentzug, während sein ungeständiger Komplize die vollen 8 Jahre hinter Gitter muß.

Der *pay off* - hier: Freiheitsverlust in Jahren von (A, B) - lässt sich in einer Tabelle darstellen

	B gesteht	B schweigt
A gesteht	(-4, -4)	(-1, -8)
A schweigt	(-8, -1)	(-2, -2)

Das einzige Nash-Gleichgewicht in diesem Beispiel bildet die Strategiekombination *beide gestehen*. In den drei anderen Kombination würde jeweils einer der beiden seine Situation verbessern, wenn er seine Strategie ändert... für beide zusammen betrachtet wäre es aber natürlich am besten, wenn *beide schweigen*! Wir sehen also, dass ein Nash-Gleichgewicht im Allgemeinen keinesfalls die Ideallösung im Sinne aller Beteiligten darstellt.

3 Der *price of anarchy*

Der Konzept des *price of anarchy* geht auf Elias Koutsoupias, Christos Papadimitriou und ihre Arbeit *Worst-case Equilibria* [1] zurück. Im Gegensatz zu vorherigen Untersuchungen gilt die Intention des *price of anarchy* nicht der Suche nach einer optimalen Lösung für die dezentrale Planung eines Netzwerks, sondern vielmehr der Beschäftigung mit der ungünstigsten stabilen Lösung für alle Beteiligten.

Als stabile Lösungen anerkannt werden alle Konfigurationen, die eintreffen mögen, wenn die Spieler zwar selbstsüchtig (und ohne Absprachen!) aber dennoch rational handeln, d.h. ausreichend intelligent sind, um die beste Lösung aus egoistischer Sicht zu erzielen. In diesem Sinne werden bei dezentraler Planung Nash-Gleichgewichte als *das* Konzept der Rationalität akzeptiert² und für die Berechnung von möglichen stabilen Lösungen der Netzwerkstruktur herangezogen.

Die Suche nach einer *besten* Lösung für die Allgemeinheit gestaltet sich unter diesem Aspekt wesentlich einfacher, weil nach Festlegung von Bewertungskriterien lediglich entsprechend zentral optimiert werden muss. Gegeben sei dazu eine Funktion C , die jeder Strategiekombination s einen Wert, die sozialen Kosten für das entstehende Netzwerk $G(s)$, zuordnet³. Damit ist ein Netzwerk umso sozialer, desto weniger Kosten entstehen und der *price of anarchy* ρ für ein dezentral geplantes Netzwerk lässt sich eindeutig definieren durch

$$\rho = \frac{\max\{C(s): \text{Strategiekombination } s \text{ ist Nash-Gleichgewicht}\}}{\min\{C(s): \text{Strategiekombination } s \text{ beliebig}\}}.$$

Auch an unserem Beispiel des Gefangenendilemmas können wir einen *price of anarchy* berechnen. Das Nash-Gleichgewicht (*beide gestehen*) käme dann zustande, wenn die Gefangenen zwei verschiedene egoistisch und ohne Absprache *dezentral* agierende Anwälte hätten. Das soziale Optimum (*beide schweigen*) dagegen wäre sofort erreicht, wenn beide den selben, die Aussagen *zentral* steuernden Anwalt hätten. Unsere Bewertungsfunktion sei die Summe der Haftstrafen. Demnach ist in unserem Beispiel (mit den entsprechend konstruierten Haftstrafen) der

$$\textit{price of anarchy} \text{ bzgl. der Haftstrafen} = \frac{-8 \text{ Jahre Freiheit}}{-4 \text{ Jahre Freiheit}} = 2.$$

Eine zentrale Planung wäre für die beiden Beteiligten also doppelt so gut!

²Die Spieltheorie setzt axiomatisch voraus, dass allen Spielern unbegrenzte Berechnungsmöglichkeiten zur Verfügung stehen, so dass jeder Spieler im Sinne des Konzeptes der Rationalität seinen *pay off* berechnen und Strategien wählen kann.

³Später werden wir nur noch das entstehende Netzwerk als Funktionsargument heranziehen.

4 Das Modell

Wir betrachten nun das von Fabrikant et al. eingeführte Spiel [3].

IDEE. Die dezentrale Entstehung eines (Internet ähnlichen) Netzwerkes soll modelliert werden: Egoistisch agierende Spieler=Knoten (*router, host*) bauen Verbindungen=Kanten (Glasfaserkabel) auf, um untereinander kommunizieren zu können. Der *price of anarchy* soll anhand der Hardwarekosten (für errichtete Kanten) und Servicekosten (für *ungünstige* Verbindungen) aller Spieler errechnet werden.

Definition (*Unilateral Connection Game*)

Das UCG besteht aus n Spielern (Knoten) $V = \{0, \dots, n-1\}$.

Ein Spieler $v \in V$ wählt aus der Menge $S_v = \{(s_{vw})_{w \neq v} | s_{vw} \in \{0, 1\}, w \in V\}$ eine Strategie s_v , wobei v für jedes $s_{vw} = 1$ eine ungerichtete Kante $\{v, w\}$ erbaut. Eine Strategiekombination $s = \{s_0, \dots, s_{n-1}\}$ liefert uns damit einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $E = \{(v, w) : v \neq w, s_{vw} = 1 \vee s_{wv} = 1\}$.

Für jede errichtete Kante wird dem entsprechenden Spieler ein vorher festgelegter Preis $\alpha > 0$ berechnet. Desweiteren entstehen für jeden Spieler v Entfernungskosten in Höhe von $\sum_{w \in V} d_G(v, w)$, wobei $d_G(v, w)$ die Länge des kürzesten Weges von v nach w bezeichnet⁴. Somit ergeben sich für Spieler v unter der Strategiekombination s die Gesamtkosten

$$c_v(s) = \alpha |\{s_{vw} = 1\}| + \sum_{w=0}^{n-1} d_G(v, w).$$

Die sozialen Kosten werden entsprechend aufsummiert zu

$$C(s) = \sum_{v=0}^{n-1} c_v(s).$$

Für jede Strategiekombination \hat{s} mit

$$C(\hat{s}) = \min\{C(s) : \text{Strategiekombination } s \text{ beliebig}\}$$

bezeichnen wir den daraus resultierenden Graphen $G(\hat{s})$ als soziales Optimum.

⁴Existiert keine Verbindung von v nach w so ist $d_G(v, w) = \infty$. Dieser Fall kann jedoch aus Kostengründen weder für Nash-Gleichgewichte noch für soziale Optima auftreten.

5 Grundlegende Resultate im UCG

Es sei darauf hingewiesen, dass das Konzept des Nash-Gleichgewichts einige Schwierigkeiten verursacht: Die Lösungen sind zum einen rein deklarativ, wir haben also im Allgemeinen keinen Algorithmus zur Herleitung einer dezentral entwickelten Strategiekombination. Zum anderen ist das Ergebnis ggf. nicht-deterministisch, weil wir bei mehreren Lösungen keine Aussage darüber machen können, welches Nash-Gleichgewicht angenommen wird (letzteres ist für die Bestimmung des *price of anarchy* glücklicherweise auch nicht nötig). Folgender Satz ist ein Hinweis auf die Komplexität einer algorithmischen Lösungsfindung:

Satz 1: „Berechne bei gegebener Strategiekombination $s \in S_0 \times \dots \times S_{n-1}$ im UCG die beste Strategie für einen Spieler $v \in V$ “ ist NP-vollständig.

Beweis: Wir transformieren polynomial auf das *Dominating Set Problem*. Dabei wird für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ eine minimale Knotenmenge $W \subset V$ gesucht, so dass jeder Knoten $v \in V$ in W enthalten, oder zu einem Knoten $w \in W$ adjazent ist.

Wir betrachten den Fall, dass $1 < \alpha < 2$ und eine Strategiekombination s mit $\forall w \in V : d_G(v, w) = \infty$ gegeben ist:

$\alpha < 2$ bedingt $\forall w \in W : d_G(v, w) \leq 2$, denn bei größerer Entfernung bringt ein Kantenbau $\{v, w\}$ mindestens $3 - 1 > \alpha$ an Kostenersparnis und $\alpha > 1$ impliziert $|\{s_{vw} = 1\}| \rightarrow \min$, weil eine überflüssige Kante nur $2 - 1 < \alpha$ an Ersparnis liefert. Damit entspricht die Strategiesuche von v dem *Dominating Set Problem*. \square

Invariate: Für alle Nash-Gleichgewichte im UCG gilt, dass keine Kante von beiden Seiten errichtet wird. Andernfalls könnte sich einer der beiden Knoten die Baukosten durch einen entsprechenden Strategiewechsel sparen.

Ebenso werden bei zentraler Planung keine doppelten Kanten gebaut. Die für uns relevanten Netzwerke sind also stets schlichte Graphen ohne Multikanten und die sozialen Kosten betragen

$$C(G(V, E)) = \sum_{v \in G} c_v = \alpha|E| + \sum_{v, w \in G} d_G(v, w).$$

Untere Schranke für die sozialen Kosten:

Alle Knoten, die nicht direkt miteinander verbunden sind, haben mindestens den Abstand 2. Damit haben wir eine untere Schranke für die sozialen Kosten:

$$\begin{aligned} C(G(V, E)) &\geq \overbrace{\alpha|E|}^{\text{Baukosten}} + \overbrace{2|E|}^{\text{direkte Verbindungen}} + 2(\overbrace{n(n-1) - 2|E|}^{\text{restliche Verbindungen}}) \\ &= 2n(n-1) + (\alpha-2)|E|. \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Schranke wird von jedem Graphen mit Durchmesser ≤ 2 angenommen.

5.1 Fall $\alpha < 1$

Nach Gleichung (1) werden die sozialen Kosten minimiert, wenn wir $|E|$ maximieren. Daher ist der vollständige Graph K_n die beste Lösung für die Allgemeinheit. Weil in einem Nash-Gleichgewicht für das UCG kein Spieler auf eine Kante verzichtet wird, deren Bau die Gesamtentfernung zu den anderen Knoten um mehr als α verringert, folgt zwangsläufig, dass der vollständige Graph ebenso das einzige Nash-Gleichgewicht darstellt. Der *price of anarchy* ist somit 1.

5.2 Fall $1 \leq \alpha < 2$

Für das soziale Optimum gelten dieselben Überlegungen wie oben.

Für $\alpha > 1$ ist der vollständige Graph jedoch kein Nash-Gleichgewicht mehr, denn die erste *fehlende* Kante spart Baukosten in Höhe von α , bedingt aber bloß zusätzliche Entfernungskosten von 1. Es ist also ein Spieler bereit, seine Strategie zu wechseln. Für $\alpha = 1$ ist K_n zwar ein Nash-Gleichgewicht, aber es gibt schlechtere Fälle, wie die folgende Argumentation zeigt.

Für $\alpha < 2$ hat jeder Gleichgewichtgraph einen Durchmesser ≤ 2 , denn ab einer Entfernung von 3 ist es billiger, eine direkte Verbindung zu bauen (Entfernungseinsparung: $3 - 1 = 2 > \alpha$). Wie oben bereits angedeutet ist für jeden Graphen mit Durchmesser ≤ 2 die Ungleichung (1) scharf. Demnach tritt für die Allgemeinheit der ungünstigste Fall für $|E| \rightarrow \min$ ein. Die minimale Kantenmenge für einen zusammenhängenden Graphen beträgt $n - 1$. Somit bildet der Stern (Durchmesser 2) das schlechteste Nash-Gleichgewicht.

Der *price of anarchy* für $1 \leq \alpha < 2$ berechnet sich damit als

$$\begin{aligned} \frac{C(\text{Stern})}{C(K_n)} &= \frac{\overbrace{\alpha(n-1)}^{\text{Baukosten}} + \overbrace{2(n-1)}^{\text{direkte Verbindungen}} + 2 \overbrace{(n(n-1) - 2(n-1))}^{\text{restliche Verbindungen}}}{\underbrace{\frac{\alpha}{2}n(n-1)}_{\text{Baukosten}} + \underbrace{n(n-1)}_{\text{Entfernungskosten}}} \\ &= \frac{\alpha + 2 + 2n - 4}{\frac{\alpha}{2}n + n} = \frac{2\alpha - 4 + 4n}{(\alpha + 2)n} \\ &= \frac{4}{\alpha + 2} - \frac{4 - 2\alpha}{(\alpha + 2)n} < \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

5.3 Fall $\alpha \geq 2$

Wieder gibt uns Gleichung (1) die Lösung für das soziale Optimum: $|E|$ muß so gering wie möglich gehalten werden (bei einem Durchmesser ≤ 2), also der Stern. Der Stern ist ebenso ein Nash-Gleichgewicht, weil jede weitere Kante zu teuer wäre (Entfernungseinsparung nur 1). Allerdings kann es noch schlechtere Nash-Gleichgewichte geben, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

6 Obere Schranken im UCG

6.1 Fall $\alpha \geq n^2$

Bei dermaßen hohen Baukosten kann ein Nash-Gleichgewicht nur einen Baum darstellen: Der Bau einer Kante erweist sich nur dann als sinnvoll, wenn ansonsten eine *unendliche Entfernung* auftreten würde. Denn selbst im (nicht realisierbaren) Fall, dass ein Knoten zu allen anderen eine maximale Entfernung von $n - 1$, also Entfernungskosten von $(n - 1)^2$ hätte, und eine einzige Kante all diese $n - 1$ Entfernung auf jeweils 1 reduzieren würde, wäre diese Kante zu teuer:

Kosten: $+\alpha + (n - 1) - (n - 1)^2 = \alpha + n - 1 - n^2 + 2n - 1 > 3n - 2 > 0$.

Somit gilt für den *price of anarchy*

$$\rho = \frac{C(\text{Baum})}{C(\text{Stern})} \in O\left(\frac{\alpha n + n n^2}{\alpha n + 1 n^2}\right) = O(1).$$

Diese konstante Schranke ist nicht größer als 5 wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2: Für jedes Baum-Nash-Gleichgewicht $T = (V, E)$ ist der *price of anarchy* $\rho(T) < 5$.

Beweis: Wir definieren für einen beliebigen Knoten $v \in V$ die Menge $L(v) := \{w \in V \mid w \text{ liegt in der kanonisch maximalen Zusammenhangskomponente von } G_v\}$, wobei $G_v := (V - \{v\}, E - \{\text{alle adjazente Kanten von } v\})$.

T hat einen Zentralknoten z mit $|L(z)| \leq \frac{n}{2}$, wie wir induktiv sehen: Starten wir bei einem beliebigen Knoten v_i mit $|L(v_i)| > \frac{n}{2}$. Weil T zusammenhängend ist können wir einen Knoten v_{i+1} wählen mit $v_{i+1} \in L(v_i)$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Entweder ist nun $L(v_{i+1}) \subset L(v_i)$ oder $L(v_{i+1}) \subset V - L(v_i)$. Dies impliziert $|L(v_{i+1})| \leq \min\{\frac{n}{2}, |L(v_i)| - 1\}$, womit wir induktiv einen Zentralknoten finden.

Setzen wir nun z als Wurzel von T und betrachten ein beliebiges Blatt l in der Baumtiefe $d \geq 2$. Wenn kein solches Blatt existiert, ist der Baum ein Stern und der *price of anarchy* 1. Da die Kante $\{l, v\}$ nicht gebaut wurde, muß gelten:

$$\alpha \geq (d - 1)\left(\frac{n}{2} - 1\right) \Rightarrow d \leq 1 + \frac{2\alpha}{n-2}.$$

Dies ist eine untere Schranke für die Ersparnis durch $\{l, v\}$ aufgrund der kürzeren Entfernung zu allen Knoten, die in G_z nicht in der gleichen Zusammenhangskomponente wie l liegen. Da der Durchmesser eines Baumes nie seine doppelte Tiefe überstiegen kann gilt damit $\text{diam}(T) \leq 2d = 2 + \frac{4\alpha}{n-2}$.

Deshalb können wir die sozialen Kosten beschränken durch

$$C(T) \leq \alpha(n - 1) + 2(n - 1) + \left(2 + \frac{4\alpha}{n - 2}\right)(n - 1)(n - 2) = 5\alpha(n - 1) + 2(n - 1)^2.$$

Im Vergleich zum Stern als soziales Optimum ergibt sich somit

$$\rho(T) = \frac{5\alpha(n - 1) + 2(n - 1)^2}{\alpha(n - 1) + 10(n - 1)^2} < \frac{5\alpha(n - 1) + 2(n - 1)^2}{\alpha(n - 1) + 2(n - 1)^2} = 5.$$

□

6.2 Fall $2 \leq \alpha < n^2$

Für $2 \leq \alpha < n^2$ konnten Fabrikant et al. keine konstante Schranke für den *price of anarchy* im UCG nachweisen. Ihre beste Näherung beschreibt der folgende Satz.

Satz 3: Der *price of anarchy* im UCG für $\alpha < n^2$ liegt in $O(\sqrt{\alpha})$.

Beweis: Wie bereits gezeigt ist der Stern das soziale Optimum und

$$\begin{aligned} C(\text{Stern}) &= \alpha(n-1) + 2(n-1) + 2(n(n-1) - 2(n-1)) \\ &= 2n^2 + (\alpha-4)n - (\alpha-2) \in \Theta(\alpha n + n^2). \end{aligned}$$

Der *price of anarchy* berechnet sich demnach durch

$$\rho(G(V, E)) \in \Theta\left(\frac{\alpha|E| + \sum_{v,w \in G} d_G(v, w)}{\alpha n + n^2}\right).$$

Sei $m := \text{diam}(G)$ die maximale Knotenentfernung. Wir betrachten $v, w \in V$ mit $m = d_G(v, w)$. Die Ersparnis durch einen Kantenbau $\{v, w\}$ beträgt mindestens

$$z := \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} m + 1 - 2i,$$

denn mit einer neuen Kante $\{v, w\}$ beträgt die Entfernung von v nach w nur 1 anstatt m , ergibt also $m-1$ Einsparung, die Entfernung zum vorletzten Knoten auf dem kürzesten Weg von v nach w beträgt nur 2 anstatt $m-1$, ergibt also $m-3$ Einsparung, usw. - diese Argumentation beschränkt sich nur auf jene Knoten, die nach der Hälfte der Distanz auf dem kürzesten Weg von v nach w liegen.

Für einen Gleichgewichtsgraphen muß $z - \alpha \leq 0$ gelten, denn ein weiterer Kantenbau darf sich nicht lohnen! Dies impliziert $m \in O(\sqrt{\alpha})$ und daraus folgt

$$\sum_{v,w \in G} d_G(v, w) \in O(n^2 \sqrt{\alpha}).$$

Es genügt nun zu zeigen, dass $|E| \in O(\frac{n^2}{\sqrt{\alpha}})$, denn damit wäre

$$\rho(G) \in O\left(\frac{\sqrt{\alpha} n^2}{\alpha n + n^2}\right) = O(\sqrt{\alpha}).$$

Wir betrachten dazu einen beliebigen Knoten v und seine Kanten e_1, \dots, e_l . Wir werden diesen Kanten nun Knoten u mit $\{v, u\} \notin E$ zuteilen und zeigen, dass das Verhältnis zwischen diesen Kanten und den an v nicht vorhandenen Kanten in $O(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$ liegt. Mit diesem Verhältnis zwischen Kanten und Knotenpaaren wäre die Behauptung bewiesen.

Sei $T_i = \{u \in V : \text{der kürzeste Weg von } v \text{ nach } u \text{ geht durch } e_i\}$. Wir wählen im Zweifelsfall *einen* kanonischen kürzesten Weg (z.B. jenen mit dem geringsten Kantenindex) und stellen somit sicher, dass die T_i disjunkt sind!

Bevor e_i gebaut wurde war der kürzeste Weg von v zu $u \in T_i$ in $G^* := (V, E - e_i)$ entweder ∞ oder $\leq 2 \text{diam}(G) \leq 4\sqrt{\alpha}$.

Wir machen diesbezüglich eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $\forall u \in T_i : d_{G^*}(v, u) \neq \infty$

$\Rightarrow T_i$ und v sind in $G^* := (V, E - e_i)$ zusammenhängend. Damit gilt:

$$\forall u \in T_i : \underbrace{d_{G^*}(v, u)}_{\leq 4\sqrt{\alpha}} - \underbrace{d_G(v, u)}_{\geq 1} < 4\sqrt{\alpha}. \quad (2)$$

Da uns der Graph G ein Nash-Gleichgewicht liefert, muß sich der Bau von e_i gelohnt haben, d.h.

$$\sum_{u \in T_i} (d_{G^*}(v, u) - d_G(v, u)) \geq \alpha. \quad (3)$$

(2) und (3) implizieren $|T_i| = \Omega(\sqrt{\alpha})$. Wir haben also gezeigt, dass zu $\{v, w\} \in E$ $\Omega(\sqrt{\alpha})$ Knoten mit $\{u, v\} \notin E$ existieren, denn bei einer direkten Verbindung zu v würde der kürzeste Weg eines Knotens $u \in T_i - \{w\}$ ja nicht über e_i führen. Diese Nicht-Kanten werden maximal zweimal, nämlich einmal von beiden Seiten, gezählt.

2. Fall: $\exists u \in T_i : d_{G^*}(v, u) = \infty$

$\Rightarrow T_i$ und v sind in $G^* := (V, E - e_i)$ nicht zusammenhängend. G^* besteht aus exakt 2 Komponenten, weil für den zusammenhängenden Graph G nur noch $e_i = \{v, w\}$ benötigt wird. Damit können wir wie folgt die Nicht-Kanten zählen

$$\omega := \underbrace{|T_i| - 1}_{\text{Nicht-Kanten zu } v \text{ abzgl. } \{w, v\}} + \underbrace{|V - T_i| - 1}_{\text{Nicht-Kanten zu } w \text{ abzgl. } \{v, w\}}$$

$\Rightarrow \omega = n - 2 \in \Omega(\sqrt{\alpha})$, weil $\alpha < n^2$.

Diese Nicht-Kanten werden wiederum maximal doppelt gezählt.

Damit ist $|E| \in O(\frac{n^2}{\sqrt{\alpha}})$ bewiesen.

□

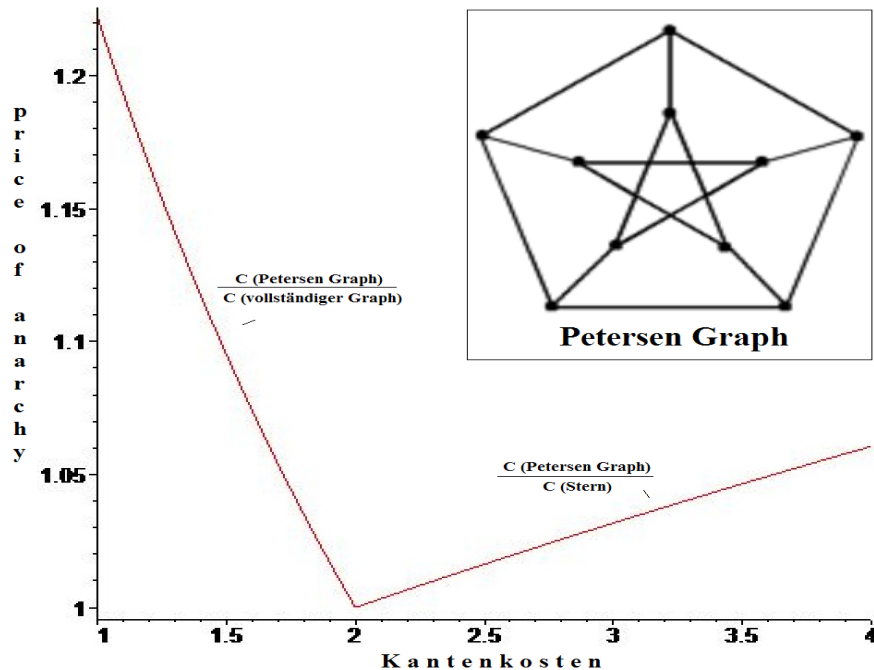
6.3 Tabellarische Zusammenfassung

Die Ergebnisse von Fabrikant et al. seien hier nochmal zur besseren Übersicht in einer Tabelle zusammengefasst:

Bereich	sozialste Lsg.	unsozialste Lsg.	<i>price of anarchy</i>
$0 < \alpha < 1$	K_n	K_n	$= 1$
$1 \leq \alpha < 2$	K_n	Stern	$< \frac{4}{3}$
$2 \leq \alpha < n^2$	Stern	?	$O(\sqrt{\alpha})$
$n^2 \leq \alpha < \infty$	Stern	Baum	< 5

7 Die Baumvermutung

Unsere tabellarische Zusammenfassung läßt eine Frage offen: Wie sehen Nash-Gleichgewichte im Fall $2 \leq \alpha < n^2$ aus? Alle Untersuchungen für diesen Bereich lieferten Baum-Nash-Gleichgewichte, mit einer einzigen Ausnahme. Bei 10 Spielern und Kantenkosten $1 \leq \alpha \leq 4$ ist der *Petersen Graph* ein Nash-Gleichgewicht im UCG. Die nachfolgende Grafik zeigt die übliche Darstellung des *Petersen Graph* und seinen *price of anarchy* in Abhängigkeit der Kantenkosten α .



Erläuterungen zur Grafik. Anhand der Kurve des *price of anarchy* wollen wir noch einmal die grundlegenden Ergebnisse für das *UCG* diskutieren: Für $\alpha < 2$ fällt die Kurve, denn der *Petersen Graph* hat weniger Kanten als das soziale Optimum (K_n), und diese werden immer teurer. Im Fall $\alpha = 2$ ist jeder Graph mit Durchmesser 2 ein soziales Optimum, demnach auch der *Petersen Graph* (*price of anarchy* = 1). Für $\alpha > 2$ steigt die Kurve, denn die größere Kantenmenge des Petersen Graph im Vergleich zum sozialen Optimum (dem Stern) wird immer uneffizienter.

Fabrikant et al. fanden heraus, dass es für den Petersen Graph eine Folge von einseitigen Strategieänderungen gibt, welche jeweils die Nutzenfunktion des ändernden Spielers konstant läßt und zu einem Zustand führt, in dem eine weitere einseitige Strategieänderung die entsprechende Nutzenfunktion verbessern würde... Solche Nash-Gleichgewichte, die durch eine Folge von Strategieänderungen in Nicht-Nash-Gleichgewichte überführt werden können, bezeichnen wir als *transient*. Die Untersuchungen von Fabrikant et al. führten zu folgender These:

Baum-Vermutung: Es gibt eine Konstante A , so dass für $\alpha > A$ jedes nicht-transient Nash-Gleichgewicht ein Baum ist.

Die Verifikation der Baum-Vermutung hätte einen konstanten *price of anarchy* bedeutet, denn unter Vorbehalt der Baumvermutung implizieren Satz 2 und 3, dass $\rho(G) \in O(\sqrt{\alpha})$ bzw. $\rho(G) < 5$, also konstant ist. Allerdings wurde die Baum-Vermutung widerlegt (siehe folgender Abschnitt).

8 Verbesserte Schranken

Albers et al. [5] konnten mit Hilfe des mathematischen Konzeptes von *affinen endlichen Ebenen* eine Graphenklasse generieren, welche die Baumvermutung widerlegt. Es gilt allerdings immerhin:

Satz 4: Für $\alpha \geq 12n \log n$ ist jedes Nash-Gleichgewicht ein Baum und der *price of anarchy* $\rho \leq 1 + \frac{6n \log n}{\alpha} \leq 1.5$.

Außerdem wurde nachgewiesen:

Satz 5: Für alle $\alpha > 0$ ist der *price of anarchy* $\rho \leq 15(1 + (\min\{\frac{\alpha^2}{n}, \frac{n^2}{\alpha}\})^{\frac{1}{3}})$.

Dies führt zu folgenden verbesserten Schranken:

- Für $\alpha \leq \sqrt{n}$ und $\alpha \geq 12n \log n$ ist ρ konstant!
- Für restliche α gilt maximal $\rho \in O(n^{\frac{1}{3}})$, anstatt bisher $O(n)$.

Wichtigstes Hilfsmittel für diese Ergebnisse ist der *shortest path tree*:

Definition (*Shortest Path Tree*)

Gegeben sei der Graph G eines Nash-Gleichgewichtes im UCG. Für einen beliebigen Knoten u (nachfolgend die Wurzel) setzt sich der *shortest path tree* $T(u)$ wie folgt zusammen:

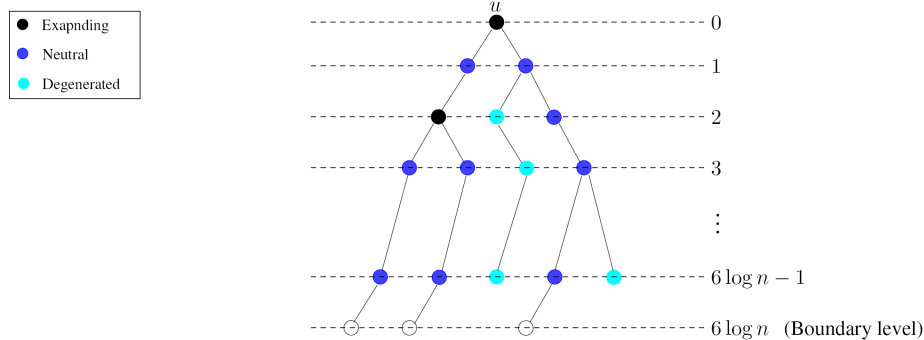
Die Wurzel u von $T(u)$ repräsentiert die Baumebene 0. Bei gegebenen Knoten der Ebenen 0 bis $i - 1$ setzt sich Ebene i wie folgt zusammen:

Ein Knoten w gehört zu Ebene i , falls w bisher noch nicht in den Baum eingetragen wurde und es einen Knoten v in Ebene $i - 1$ gibt mit $\{v, w\} \in E$. Es wird immer nur *eine* solche Kante in den Baum eingetragen (*tree edges*). Die am Ende verbleibenden Kanten bezeichnen wir als *non-tree edges*. Auf diese Weise werden alle Knoten in den Baum eingetragen (G ist ein Nash-Gleichgewicht, also zusammenhängend).

Innerhalb des *shortest path tree* bezeichnen wir Baumknoten in der Ebene $6 \log n$ als Knoten im *Boundary level* und unterscheiden für beliebige Knoten $v \in V$ in der Ebene $i < 6 \log n$ drei Arten von Baumknoten:

- **Expanding:** v hat mindestens zwei Kinder mit jeweils mindestens einem Nachfolger im *Boundary level*
- **Neutral:** v hat genau ein Kind mit mindestens einem Nachfolger im *Boundary level*
- **Degenerated:** v hat keinen einzigen Nachfolger im *Boundary level*

Der *shortest path tree* ist also lediglich eine geschichtete Version des zugrundeliegenden Graphen mit ausgezeichneten Kanten und Knoten:



Beispiel für einen shortest path tree

Mit Hilfe des *shortest path tree* lassen sich Aussagen über den *girth* (Länge des kürzesten Zykel) und den Durchmesser eines Graphen verbinden. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Anzahl der Knoten im *Boundary level*.

Um einen Graphen als Baum zu klassifizieren genügt es allgemein zu zeigen, dass $girth(G) > 2 \cdot diam(G)$. Dies machen sich Albers et al. zu Nutzen:

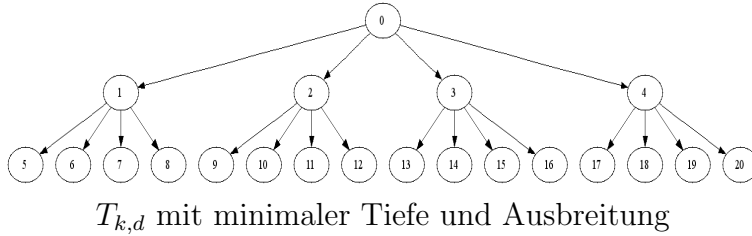
Satz 4 folgt aus dem Beweis, dass jeder *shortest path tree* für einen beliebigen Gleichgewichts-Graphen G mit $girth(G) \geq 12n \log n$ keine Knoten im *Boundary level* hat.

9 Untere Schranke im UCG

Nachdem wir bisher nur Ergebnisse betrachtet haben, die den price of anarchy von oben beschränken, wollen wir nun noch zeigen, dass auch eine Instanz des UCG existiert, für die eine zentrale Planung zu einem (fast) dreimal günstigeren Netzwerk führen würde.

Satz 6: $\forall \epsilon > 0 \exists$ Nash-Gleichgewicht G des UCG mit $\rho(G) > 3 - \epsilon$.

Beweis: Wir betrachten für beliebiges $k \geq 4$, $d \geq 2$ die Familie der vollständigen k -nären Bäume $T_{k,d}$ der Tiefe t , in dem alle Kanten von den Eltern zu den Kindern gebaut werden. Sei n die Anzahl der Knoten in $T_{k,d}$ und $\alpha = (d - 1)n$.



Lemma: $T_{k,d}$ ist ein Nash-Gleichgewicht des UCG.

Beweis: Da alle Kanten von den Eltern zu den Kindern gebaut werden, muß jeder Knoten v über der Blattebene mindestens eine Verbindung in jeden der k durch seine Kinder aufgespannten Teilbäume aufbauen (ansonsten wäre der Graph nicht zusammenhängend und die Kosten $c_v = \infty$).

Wenn v nur eine einzige Verbindung in den Teilbaum eines bestimmten Kindes w aufbaut, dann ist es am günstigen, wenn er sich direkt mit w verbindet, denn die Verbindung zu einem beliebigen Nachfolger u von w brächte v zwar näher zu allen Knoten im Teilbaum mit Wurzel u , aber weiter weg von w und mindestens 3 weiteren Teilbäumen (da $k \geq 4$), d.h. die Entfernungskosten werden deutlich größer! Jede weitere Kante in den Teilbaum mit Wurzel w würde weitere $\alpha = (d - 1)n$ zusätzliche Kosten mit sich bringen. Ein Teilbaum hat aber maximal $\frac{n}{k}$ Knoten und die größtmögliche Entfernungseinsparung ist $d - 1$ pro Knoten, also in der Summe deutlich kleiner. Wir haben also gezeigt, dass sich jeder Knoten mit seinen Kindern, aber mit keinen weiteren Nachfolgern verbindet.

Nun betrachten wir noch die Strategiefrege aus der Sicht eines Kindes. Nachdem alle Kanten von Eltern zu Kindern gebaut wurden, können diese natürlich trotzdem versuchen sich in eine bessere Situation zu bringen.

Für die Wurzel von $T_{k,d}$ genügt unsere einleitende Betrachtung. In einem beliebigen Teilbaum mit Wurzel v ist jeder Knoten $u \neq v$ in der Tiefe $\delta \geq 1$ bereits über die Kante von seinem Vorgänger mit allen Knoten außerhalb des Teilbaums verbunden. Wenn u sich nun aus eigener Kraft mit v verbindet, würde er die Distanz zu jedem anderen Knoten um maximal $\delta - 1$ verringern, d.h. die maximale

Ersparnis wäre $(d - 1)(n - 1)$ und somit nicht ausreichend. Ebenso lohnt keine Verbindung zu einem Bruderknoten, denn damit könnte ja nur 1 an Entfernungskosten für jede Verbindung, also insgesamt nicht mehr als $n - 1$, gespart werden. Betrachten wir eine beliebige, noch nicht ausgeschlossene Verbindung $\{u, x\}$. Die direkte Verbindung zum Vorgänger existiert ja schon und wird also auch ausgeschlossen. Zu seinen Nachfolgern wird sich u nach unserer einleitenden Überlegung auch nicht verbinden.

Sei w der Bruder von u , der ein Vorgänger von x ist, oder die Wurzel ($w = v$), falls kein entsprechender Bruder existiert. Der Weg $w = y_0, y_1, \dots, y_m = x$ geht über keinen Knoten, der mit u direkt verbunden ist - außer $w = y_0$ ist die Wurzel und u ein Kind von w , was die folgende Argumentation aber nicht beeinflusst:

Wir wissen bereits, dass eine neue Kante $\{u, w\}$ deutlich weniger Ersparnis bringt als α . Die Ersparnisse für eine Kante $\{u, y_{i+1}\}$ sind schlechter als jene für $\{u, y_i\}$, da u zwar um 1 näher an die Knoten des Teilbaums mit Wurzel y_{i+1} herankommt, aber aufgrund der Voraussetzung $k \geq 4$ von allen Knoten der Unterbäume von mindestens zwei anderen Kindern von y_i - jene, die weder Vorfahre von x , noch von u sind und somit keinen kürzeren Weg zu u haben - bzgl. einem alternativen Kantenbau $\{u, y_i\}$ um 1 weiter entfernt wird. Induktiv folgt, dass eine Kante $\{u, x\}$ auch nicht erstrebenswert ist.

Somit haben wir gezeigt, dass *eine* weitere Kante keine Ersparnisse bringt. Da die Entfernungskostenersparnis durch mehrere Kanten nicht größer ist als die Summe der einzelnen Ersparnisse, werden auch mehrere Kanten keinen Vorteil bringen. Letztendlich zeigt unsere Diskussion, dass keine Kanten weg- oder dazugenommen werden können, d.h. $T_{k,d}$ ein Nash-Gleichgewicht ist! \square

Die Kosten für das soziale Optimum (der Stern) betragen $\alpha(n - 1) + 2(n - 1) + 2(n - 1)(n - 2) = ((d - 1)n + 2 + 2(n - 2))(n - 1) = (d + 1)n(n - 1) - 2(n - 1)$. Die Anzahl der Blätter ist $\geq \frac{n(k-1)}{k}$. Es gibt also mehr als $(\frac{n(k-1)}{k} - 1)^2$ Blattpaare (beide Richtungen). Wir können für jedes Blattpaar Entfernungskosten von $2d$ veranschlagen: Für die Blätter in der gleichen Baumhälfte zählen wir, jeweils hin und zurück, die Kosten für die Verbindung zur Wurzel, sowie die Kosten für die Verbindung zu einem Nicht-Blatt auf der anderen Baumseite. Ein solcher Knoten existiert aufgrund der Voraussetzung $d \geq 2$. Damit erhalten wir

$$C(T_{d,k}) \geq \alpha(n - 1) + 2d\left(\frac{n(k - 1)}{k} - 1\right)^2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{k,d \rightarrow \infty} \rho(T_{d,k}) &= \lim_{d \rightarrow \infty} \left(\frac{(d - 1)n(n - 1) + 2d(n - 1)^2}{(d + 1)n(n - 1) - 2(n - 1)} \right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

\square

10 Ausblick

Die Untersuchungen zum *price of anarchy* beschränken sich bei weitem nicht nur auf das *Unilateral Connection Game*. Corbo und Parkes [4] betrachten beispielsweise mit ihrem *Bilateral Connection Game (BCG)* eine Variation des UCG, in dem eine Kante nur dann errichtet wird, wenn beide betroffenen Knoten diese Kante bauen möchten. Eine Strategiekombination $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$ liefert also einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $E = \{(v, w) : v \neq w, s_{vw} = 1 \wedge s_{wv} = 1\}$. Im bilateralen Spiel teilen sich die Knoten die Baukosten. Theoretisch muß ein Knoten auch dann $\frac{\alpha}{2}$ bezahlen, wenn eine von ihm angestrebte Kante aufgrund der Blockade seines Partners nicht zu stande kommt. Diese sogenannte *sunk cost* wird allerdings bei Nash-Gleichgewichten und sozialen Optima nicht auftreten und kann deshalb vernachlässigt werden. Der *price of anarchy* im BCG unterscheidet sich nicht wesentlich vom UCG [vgl. 4].

UCG und BCG werden durch einzelne Problemstellungen des Internet motiviert. Zahlreiche Varianten versuchen andere Schwerpunkte in der Modellierung zu legen. Um nur einige Alternativen und Überlegungen zu nennen:

- **directed version:** Eine vom Spieler v eingeführte Kante kann auch nur von ihm zur Abstandermittlung benutzt werden.
- **fractional model:** Die Spieler können sich auch entscheiden nur Teilkosten für den Bau einer Kante zu zahlen. Eine Kante entsteht, wenn die Summe der entsprechenden Teilkosten mindestens α erreicht. Für Gleichgewichte und soziale Optima müssen sich die Teilkosten dann jeweils exakt zu α aufaddieren.
- **Das congestion Problem:** Abstand ist nicht gleich Abstand. Manche Wege können, z.B. aufgrund von (Daten-)Stau, ungeeigneter erscheinen als andere...
- **traffic matrix:** Das *congestion* Problem aufgreifend lässt sich eine Stau-Matrix $[t_{ij}] \geq 0$ einführen, um mit $d_G(i, j) * t_{ij}$ die verschiedenen Kanten entsprechend zu gewichten.
- **rank-one:** Anstatt n^2 viele Werte für eine Stau-Matrix vorzugeben, ließen sich einfach die n Knoten gewichten (*ranken*). Für eine Kante errechnet sich dann die Gewichtung aus dem Produkt der beiden Knotengewichte.
- **not infinite:** Endliche Kosten für das nicht-bestehen einer Verbindung.
- **stages:** Nicht alle Kanten müssen gleichzeitig entstehen und nicht alle Knoten von Anfang an im Spiel sein, aber jede Etappe muß ein Nash-Gleichgewicht darstellen!

Literaturverzeichnis

- [1] E. Koutsoupias, C. Papadimitriou
Worst-case Equilibria
Proceedings of STACS 1999
- [2] C. Papadimitriou
Algorithms, Games, and the Internet
Proceedings of STOC 2001
- [3] A. Fabrikant, A. Luthra, E. Maneva, C. Papadimitriou, S. Shenker
On a Network Creation Game
Proceedings of PODC 2003
- [4] J. Corbo, D. Parkes
The price of selfish behavior in bilateral network formation
Proceedings of PODC 2005
- [5] S. Albers, S. Eilts, E. Even-Dar, Y. Mansour, L. Roditty
On Nash Equilibria for a Network Creation Game
to appear in SODA 2006