

# Optimierung der Geschwindigkeitssteuerung bei Zeitfahrten im Radsport

## 1 Einleitung

Im Rahmen des Powerbike Projektes an der Universität Konstanz, wird ein Rennradsimulator zum Training realer Strecken im Labor entwickelt. Einen Teil dieses Projektes stellt die Optimierung der Rennstrategie dar. Im Folgenden stellen wir ein Verfahren vor, mit dem diese Anhand von mathematischen Modellen berechnet wird. Damit kann dem Athleten einerseits die optimale Geschwindigkeit bzw. Leistung während der Fahrt vorgegeben werden und andererseits ist eine Analyse absolvierter Fahrten möglich.

Die Optimierung basierend auf einem Modell für die beim Radfahren auftretenden Kräfte und einem Ausdauermodell für den Athleten. Das physikalische Modell wurde von Martin, Milliken, Cobb, McFadden und Coggan (1998) entwickelt und gilt heute als State of the Art. Das physiologische Modell beschreibt die Ermüdung des Fahrers als eindimensionale Funktion der Leistung.

Für Strecken mit stückweise konstanter Steigung konnte Gordon (2005) analytisch zeigen, dass eine konstante Geschwindigkeit auf den Teilstücken optimal ist. Dabei wurde die Trägheit vernachlässigt. Bei der Übertragung dieser Ergebnisse auf reale Strecken mit komplexen Steigungsprofilen müssen wir diese mit einbeziehen. Außerdem erfordert die Komplexität des Problems numerische Verfahren zur Lösung. In Kapitel 2, 3 und 4 werden die benutzten mathematischen Modelle und Methoden vorgestellt und in Kapitel 5 die Ergebnisse, unter anderem wie sich die optimale Geschwindigkeitssteuerung zur Analyse von Fahrten auf dem Fahrradsimulator nutzen lässt, diskutiert.

## 2 Physikalisches Modell

Das Modell von Martin et al. (1998) beschreibt die beim Radfahren auftretenden Kräfte. Dabei wird ein Zusammenhang zwischen der gefahrenen Geschwindigkeit  $v$  und der Pedalleistung  $P$  hergestellt. In das Modell fließen die Leistungen um den Luftwiderstand ( $P_{air}$ ), den Rollwiderstand ( $P_{roll}$ ) und Verluste in den Lagern ( $P_{bear}$ ) zu überwinden ein. Außerdem werden Änderungen in der Lage- und Bewegungsenergie ( $P_{pot}$  und  $P_{kin}$ ) berücksichtigt.

$$\eta P = \underbrace{\frac{c_d}{2} \rho A v^3}_{P_{air}} + \underbrace{\mu m g v}_{P_{roll}} + \underbrace{\beta_0 v + \beta_1 v^2}_{P_{bear}} + \underbrace{m g \frac{dh}{dx} v}_{P_{pot}} + \underbrace{\left(m + \frac{I_w}{r_w^2}\right) \dot{v} v}_{P_{kin}}$$

Tab. 1. gibt eine Übersicht über die benutzten Parameter. Die Höhe des Kurses  $h$  wird als Funktion der Distanz mit einem Garmin Edge 705 GPS Gerät aufgenommen, die Masse des Fahrers und des Fahrrades  $m$  wird gemessen und für die rest-

lichen Parameter werden Literaturwerte benutzt (Martin et al., 1998, Wilson, 2004 und Cyclus2 Rollreibungskoeffizient für Asphalt).

Dieses Modell wurde auf einem ebenen Kurs von Martin et al. (1998) und von Dahmen, Byshko, Saupe, Röder und Mantler (2009) für reale Kurse mit komplexen Steigungsprofilen validiert.

Tab. 1. Parameter des physikalischen Modells

Gravitationskonstante	$g$	9,81 m/s <sup>2</sup>	Rollreibungskoeffizient	$\mu$	0,004
frontale Fläche	$A$	0,4 m <sup>2</sup>	Lagerwiderstandskoeffizient	$\beta_0$	0,091 N
Luftwiderstandskoeffizient	$c_d$	0,7	Lagerwiderstandskoeffizient	$\beta_1$	0,0087 Ns/m
Radius der Räder	$r_w$	2,10 m	Trägheitsmoment der Räder	$I_w$	0,14 kgm <sup>2</sup>
Luftdichte	$\rho$	1,2 kg/m <sup>3</sup>	Kettenreibungsverluste	$\eta$	0,975

### 3 Ausdauermodell

Um die Leistungsfähigkeit des Fahrers zu beschreiben, wird ein Maß für die Ermüdung des Athleten definiert. Dies basiert auf dem Kritische-Leistung-Modell von Morton (1996), welches die Zeit  $T$  bis zur Ermüdung als Funktion einer konstanten Leistung  $P$  beschreibt. Das Modell wird durch drei Parameter definiert: die kritische Leistung  $P_0$ , die maximal mögliche Leistung  $P_m$  und die anaerobe Kapazität  $K$ .

Basierend auf diesem Modell hat Gordon (2005) ein Maß für die Ermüdung eingeführt. Die Ermüdungsrate  $R$  wird als Kehrwert der Zeit bis zur Ermüdung definiert und auf eine nicht konstante Leistung verallgemeinert.

$$R = \frac{(P_m - P_0)(P - P_0)}{K(P_m - P)}$$

Die Ermüdung  $E$  eines Athleten, an einem Punkt  $x$  auf der Strecke, erhält man, wenn man die Ermüdungsrate über die absolvierte Zeit  $t$  integriert.

$$E(x) = \int_0^t R d\tau = \int_0^x \frac{R}{v} d\xi$$

Mit dieser Definition ergibt sich, dass die Ermüdung immer zwischen 0 (erholt) und 1 (erschöpft) liegt. Die Parameter werden über eine Reihe von Stufentests bestimmt.

### 4 Optimierung der Geschwindigkeitssteuerung

Ziel der Optimierung ist es, die Zeit  $T$ , die benötigt wird um einen Kurs der Länge  $L$  zu absolvieren, zu minimieren. Diese ist gegeben durch die folgende Formel.

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{1}{v} dt$$

Unter Berücksichtigung der physischen Verfassung des Fahrers, die durch das Ausdauermodell beschrieben wird, ergibt sich folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} & \min_{v \in C^1([0,L])} T \\ \text{u.d.N.B.} \quad & 0 \leq P(x) \leq P_m \quad \text{für alle } x \in [0, L] \\ & 0 \leq E(x) \leq 1 \quad \text{für alle } x \in [0, L] \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitsfunktion wird diskretisiert, damit erhält man ein vektorielles, restringiertes Optimierungsproblem. Dies wird mit der MATLAB Funktion *fmincon()* gelöst. Dabei wird ein SQP-Algorithmus mit Liniensuche und Quasi-Newton Approximation verwendet.

## 5 Ergebnisse

### 5.1 Strecken mit konstanter Steigung

Wie Gordon (2005) gezeigt hat, ist eine konstante Geschwindigkeit/Leistung auf einer Strecke mit konstanter Steigung optimal. Beachtet man zusätzlich Einflüsse der Trägheit, ergeben sich Unterschiede in der optimalen Start- und Zielstrategie. In Abb. 1. ist die optimale Leistungsverteilung für einen Fahrer mit  $P_0=190W$ ,  $P_m=1012W$  und  $K=12225J$ , auf einem Kurs von 4km Länge und einer Steigung von 1% bzw. 10% zu sehen. Der Start erfolgt aus dem Stand. Auf der flachen Strecke ist es dabei optimal am Anfang überproportional viel Kraft zu investieren, auf der steilen Strecke ist hingegen ein langsames Anfahren optimal. Im Mittelteil der Strecke ist eine konstante Leistung optimal und am Ende kann der Fahrer seine Leistung auf beiden Strecken schon etwas vor dem Ziel auf die kritische Leistung reduzieren.

### 5.2 Reale Strecken mit komplexen Steigungsprofilen

Abb. 2. zeigt das Ergebnis (graue Kurve) der Optimierung einer realen Strecke am Beispiel des Schienerbergs, nahe Radolfzell am Bodensee. Das Höhenprofil der Strecke wurde mit einem Garmin Edge 705 GPS Gerät aufgenommen. Da die Höhendaten verrauscht sind, werden sie mit einem Gauss-Filter mit  $\sigma=30m$  geglättet und damit die Steigung des Kurses berechnet. Die Steigung dieses Kurses variiert zwischen 2% und 9% (siehe schwarze Kurve in Abb. 2.). Im Allgemeinen lohnt es sich, auf den steileren Stücken mehr Leistung zu investieren als in den flachen.

### 5.3 Analyse einer Fahrt am Simulator

Die Analyse von Fahrten auf dem Simulator wird eine Hauptanwendung der optimalen Geschwindigkeitssteuerung sein. Dabei stellt sich die Frage was der Athlet an seiner Strategie verbessern kann um einen Kurs bei gleichem Aufwand schneller zu absolvieren. Abb. 2. zeigt dies am Beispiel des Schienerbergs.

Diese zeigt, dass der Fahrer am Anfang der Strecke zu schnell gefahren ist. Speziell im relativ flachen Stück von etwa 400m bis 700m wäre ein langsames Fahren und damit eine Regeneration der Energiereserven besser gewesen. Dadurch muss er im weiteren Verlauf langsamer fahren und erreicht eine Zeit von 15:10min.

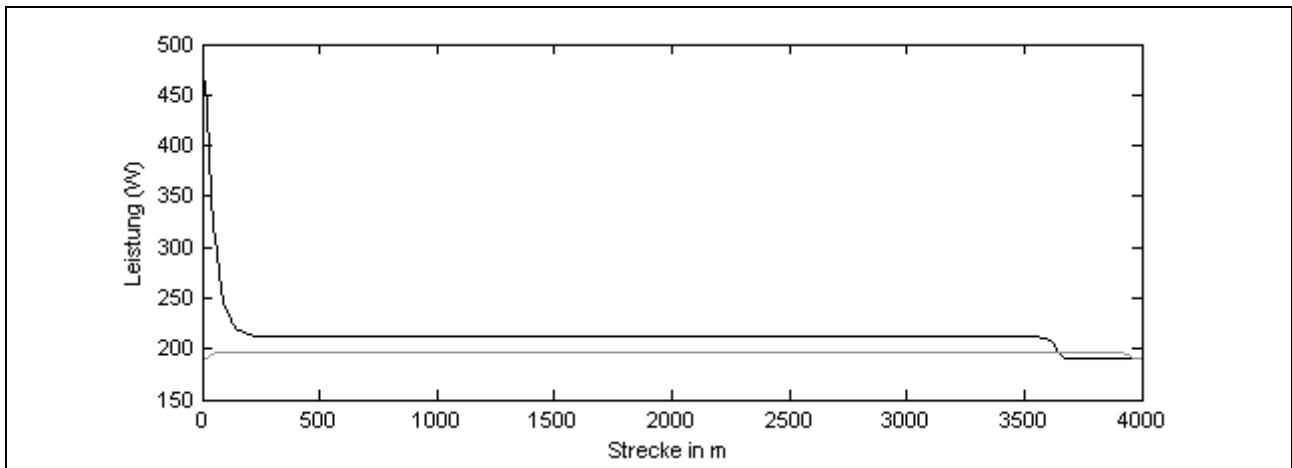


Abb. 1. Optimale Start- und Zielstrategie für einen Kurs von 4km Länge und einer konstanten Steigung von 1% (schwarz) und 10% (grau).

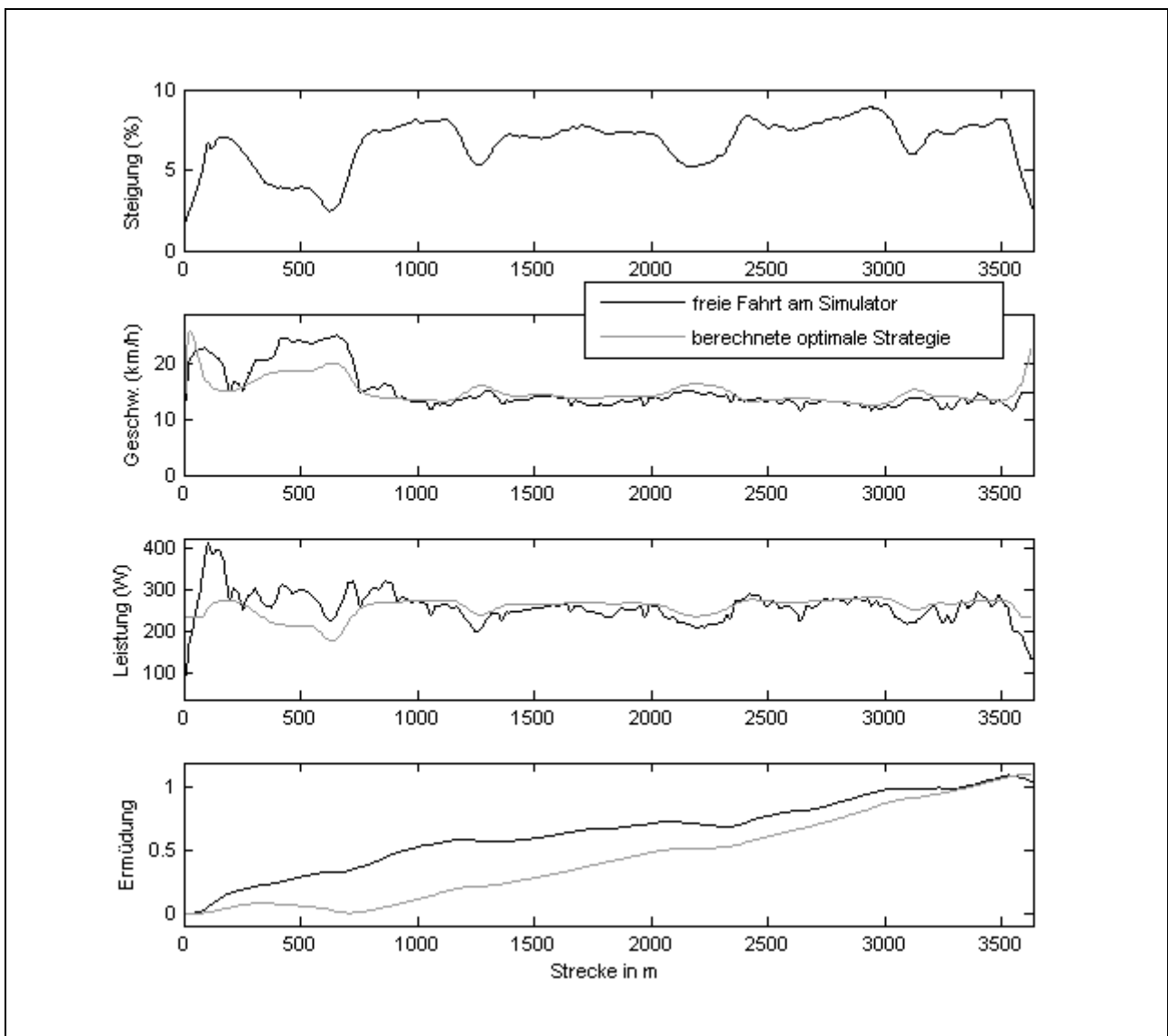


Abb. 2. Resultat für eine reale Strecke am Beispiel des Schienerbergs (Steigungsprofil schwarze Kurve oben). Die grauen Kurven sind die berechnete optimale Geschwindigkeit bzw. Leistung und der dazugehörige Ermüdungszustand des Athleten während der Fahrt. Die schwarzen Kurven wurden bei einer Fahrt auf dem Cyclus2 Ergometer unter Vorgabe der Steigungswerte aufgenommen.

Mit der optimalen Strategie wäre bei gleichem Aufwand eine Zeit von 14:48min und damit eine Zeitersparnis von 22s möglich gewesen.

## 6 Fazit & Ausblick

Mit der Berechnung der optimalen Geschwindigkeitssteuerung ist es möglich, dem Fahrer Schwachstellen in seiner Leistungseinteilung aufzuzeigen und damit bei gleicher Fitness bessere Zeiten zu ermöglichen. Dies kann, wie hier gezeigt, am Fahrradsimulator geschehen, ist aber auch bei Außenfahrten möglich. Dazu ist lediglich ein GPS-fähiger Fahrradcomputer notwendig um das Höhenprofil des Kurses zu messen. Damit kann dann die optimale Geschwindigkeit berechnet werden und mit der aufgenommenen Geschwindigkeit verglichen werden.

Da die Ermüdung von vielen, komplex miteinander agierenden Faktoren abhängt, ist unser Modell sehr vereinfacht, indem es ausschließlich von der verrichteten Leistung abhängt. Daher sollten mit einem realistischeren Modell noch bessere Ergebnisse erzielt werden können.

In der Zukunft sollen die Ergebnisse auch verstärkt bei Außenfahrten eingesetzt und getestet werden. Dazu wird ein differential GPS-Gerät (Leica GPS 900) verwendet, um ein exakteres Steigungsprofil der Strecke zu bekommen. Zusätzlich soll ein SRM Leistungsmessgerät mit einem programmierbaren Display kombiniert werden. Damit kann sich der Athlet bei Außenfahrten gemäß der Optimierung steuern lassen.

## Literatur

- Dahmen, T., Byshko, R., Saupe, D., Röder, M. & Mantler, S. (2010). *Validation of a model and of a simulator for road cycling on real tracks*. Submitted.
- Gordon, S. (2005). Optimising distribution of power during cycling time trial. *Sports Engineering*, 8 (2), 81-90.
- Martin, J.C., Milliken, D.L., Cobb, J.E., McFadden, K.L. & Coggan, A.R. (1998). Validation of mathematical model for road cycling power. *Journal of Applied Biomechanics*, 14, 276-291.
- Morton, R.H. (1996). A 3-parameter critical power model. *Ergonomics*, 39, 611-619.
- Wilson, D.G. (2004). *Bicycling Science, 3rd Edition*. Cambridge, MA: The MIT Press.