Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Prof. Dr. Ulrik Brandes
Daniel Fleischer / Jürgen Lerner

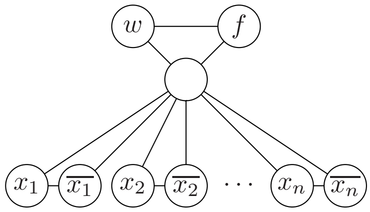
Theoretische Grundlagen der Informatik
SS 2006

# 12. Übungsblatt

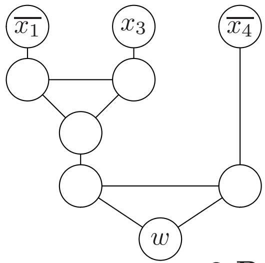
**Ausgabe:** 19. Juli 2006 **Abgabe:** –
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

**Aufgabe 45:** **0 Punkte**

Das Problem $k$-COLORING ist gegeben durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gefragt ist, ob sich die Knoten des Graphen so mit höchstens $k$ Farben färben lassen, dass keine zwei adjazenten Knoten gleich gefärbt sind.
Beweisen Sie wie folgt, dass $k$-COLORING $\mathcal{NP}$-vollständig ist.




a) Zeigen Sie 3-SAT$\preccurlyeq$ $k$-COLORING, indem Sie zu einer Instanz $I$ von 3-SAT (gegeben durch Variablen $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ und Klauselmenge $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ mit $|C_i| = 3$) den oberen nebenstehenden Graphen $G$ erzeugen.




b) Erweitern Sie $G$ für jede Klausel $C_i$ (hier beispielhaft für die Klausel $\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}$ dargestellt) um den unteren nebenstehenden Graphen. (Beachten Sie, dass die Knoten $x_i, \overline{x_i}$ und $w$ im oberen und unteren Graphen identisch sind.)

c) Zeigen Sie: $I$ erfüllbar $\Longleftrightarrow$ $G$ 3-färbbar

**Aufgabe 46:** **0 Punkte**

Beweisen Sie wie folgt, dass 2-SAT $\in \mathcal{P}$. Eine Instanz $I$ von 2-SAT ist gegeben durch Variablen $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ und eine Klauselmenge $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ über $X$ mit $|C_i| = 2$. Aus dieser wird ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ konstruiert mit $V = \{x, \overline{x} : x \in X\}$ und $E = \{(\overline{x}, y), (\overline{y}, x) :\ (x \vee y) \text{ Klausel in } C\}$ .

a) Leiten Sie aus der logischen Äquivalenz $x \vee y \equiv (\overline{x} \rightarrow y) \wedge (\overline{y} \rightarrow x)$ die Idee der Konstruktion von $G$ her.
b) Beweisen Sie, dass $I$ genau dann erfüllbar ist, wenn es in $C$ kein Literal $x$ gibt, für das in $G$ sowohl ein gerichteter $(x, \overline{x})$-, als auch ein gerichteter $(\overline{x}, x)$-Pfad existiert.
c) Skizzieren Sie einen Algorithmus, der zu einem Graphen $G = (V, E)$ und einem Knotenpaar $(u, v) \in V \times V$ in polynomialer Zeit entscheidet, ob es in $G$ einen gerichteten $(u, v)$-Pfad gibt.
d) Warum folgt daraus 2-SAT $\in \mathcal{P}$?