Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Ulrik Brandes / Dr. Jürgen Lerner / Bobo Nick

Methoden der Netzwerkanalyse
SS 2010

6. Übungsblatt

Ausgabe: 31.5.2010 **Abgabe:** 07.6.2010, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Hinweis: Sämtliche Bezeichnungen entsprechen der Notation auf den Folien zur Vorlesung. Insbesondere bezieht sich das Zufallsgraphenmodell $\mathcal{G}(n,p)$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p \in [0,1]$ auf die Klasse $\mathcal{G}$ der schlichten ungerichten (gewöhnlichen) Graphen mit n Knoten und $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ Kanten.

Aufgabe 1: $\mathcal{G}(n,p)$, Kantenkombinationen — 6 Punkte

Berechnen Sie für $\mathcal{G}(n,p)$

(a) $\mathbb{E}(m)$, die zu erwartende Kantenanzahl eines Zufallsgraphen.

(b) $\#\{G \in \mathcal{G} \mid m(G) = m_x\}$, die Anzahl der Graphen mit genau $0 \leq m_x \leq \binom{n}{2}$ Kanten.

(c) $P(m(G) = m_x)$, die Wahrscheinlichkeit für genau $0 \leq m_x \leq \binom{n}{2}$ Kanten.

(d) den wahrscheinlichsten aller Graphen. (Fallunterscheidung nötig)

(e) für $p = \frac{1}{2}$ die unwahrscheinlichste Kantenanzahl eines Graphen.

Wie sind d) und e) zu interpretieren?

Aufgabe 2: $\mathcal{G}(n,p)$, k-Kreise — 3 Punkte

Sei $k \geq 3$. Berechnen Sie für $\mathcal{G}(n,p)$ die in einem Zufallsgraphen zu erwartende Anzahl einfacher Kreise der Länge k ohne Abkürzungen.

[Bitte wenden]

Aufgabe 3: $\mathcal{G}(n,p)$, Wahrscheinlichkeitsraum **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}(n,p)$ ein gültiges Zufallsgraphenmodell definiert, d.h. es gilt:

$$\sum_{G \in \mathcal{G}} P(G) = 1$$

Tipp: Betrachten Sie die Menge aller Dyaden $D = \binom{V}{2} = \{d_1, \ldots, d_{\binom{n}{2}}\}$ und zeigen Sie per Induktion über i, dass durch $(\mathcal{G}_i, P_i)$ mit $\mathcal{G}_i = \{G \in \mathcal{G} \mid \forall j > i : d_j \notin E_G\}$ und $P_i(G) = p^{m(G)}(1-p)^{i-m(G)}$ stets ein gültiges Zufallsgraphenmodell definiert wird.

Aufgabe 4: $\mathcal{G}(n,m)$, Erzeugungsalgorithmus **6 Punkte**

Zu $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ definiere $\mathcal{G}(n,m)$ das Graphenmodell, in dem alle schlichten ungerichten Graphen mit n Knoten und genau m Kanten gleich wahrscheinlich sind (und kein anderen Graph eine positive Wahrscheinlichkeit hat).

Entwerfen Sie einen Algorithmus mit Laufzeit in $\mathcal{O}(n+m)$, der Graphen im Modell $\mathcal{G}(n,m)$ erzeugt und dabei lediglich $\min\{m, \frac{1}{2}\binom{n}{2}\}$ Zufallszahlen verwendet.

Tipp: Betrachten Sie eine geeignete injektive Abbildung $f : \{0, \ldots, \binom{n}{2}-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}^2$ und verwenden einen Fisher-Yates-Shuffle (in der Version von Durstenfeld):

Algorithm 1: Fisher-Yates-(Durstenfeld)-Shuffle

Daten : Array a der Zahlen 0 bis $l-1$
Ausgabe: Beliebige aller möglichen Permutationen

foreach $i \in \{l-1, \ldots, 0\}$ **do**
  $j \leftarrow$ Random$\{0, \ldots, i\}$
  swap($a[j]$,$a[i]$)
