Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Ulrik Brandes / Dr. Jürgen Lerner / Bobo Nick

Methoden der Netzwerkanalyse
SS 2010

8. Übungsblatt

Ausgabe: 14.6.2010 **Abgabe:** 21.6.2010, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: ERGM, Dichte — 5 Punkte

Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller schleifenfreien, ungerichteten Graphen mit $n = 3$ Knoten. Aus der ERGM-Familie betrachten wir erneut das Zufallsgraphenmodell $(\mathcal{G}, P)$, welches lediglich die Statistik $g_1 = s_2$ (Anzahl der 2-Sterne) mit zugehörigem Parameter $\theta_1 = \ln 2$ verwendet. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Dichte eines aus diesem Modell gezogenen Zufallsgraphen. (Rechenergebnisse aus der letzten Übung dürfen dabei natürlich übernommen werden!)

Aufgabe 2: ERGM, Erzeugungsalgorithmus — 5 Punkte

Bei einem auf sukzessiven Einfügen bzw. Ablehnen von Kanten beruhenden Algorithmus, wird stets aus einer Menge von Möglichkeiten $\mathcal{X}$ eine Möglichkeit $x^* \in \mathcal{X}$ entsprechend ihrer relativen Wahrscheinlichkeit $\frac{p(x^*)}{\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)}$ ausgewählt. Im $\mathcal{G}(n,p)$ Modell entspricht dieses Paradigma der Einfüge-Wahrscheinlichkeit $\frac{p}{p+(1-p)} = p$, im $\mathcal{GP}_b^n$ Modell ergibt sich die Analogie durch den temporären Vergleich der Knotengrade.

In der Vorlesung wurde bereits darauf hingewiesen, dass für ERGMs im Gegensatz zu $\mathcal{G}(n,p)$ und $\mathcal{GP}_b^n$ Modellen, im Allgemeinen, kein linearer, auf sukzessiven Einfügen und Ablehnen von Kanten beruhender Sampling Algorithmus definiert werden kann.

Zeigen Sie deshalb mit Hilfe eines möglichst einfachen ERGM, dass durch den folgenden Algorithmus falsche Zufallsgraphen-Wahrscheinlichkeiten definiert werden.

Algorithm 1: Sukzessive Kantenwahl

Daten : Kantenmenge E
Ausgabe: Zufallsgraph $G = (\{1, \dots, n\}, E)$

$E \leftarrow \emptyset$
foreach $e \in D = \{d_1, \dots, d_{\binom{n}{2}}\}$ **do**
  Füge e mit W'keit $\frac{P(V, E \cup \{e\})}{P(V,E) + P(V, E \cup \{e\})}$ zu E hinzu

[Bitte wenden]

Aufgabe 3: Markov-Ketten **10 Punkte**

Betrachten Sie das Zufallsgraphenmodell $(\mathcal{G}, P)$ aus Aufgabe 1.

(a) Definieren Sie (mit Hilfe der im Gibbs-Sampling verwendeten Strategie) Übergangswahrscheinlichkeiten für eine homogene Markov-Kette auf $\mathcal{G}$ mit eindeutiger stationärer Verteilung P. Beachten Sie, dass dazu nicht alle Einträge der 8×8 Übergangsmatrix π explizit berechnet werden müssen, weil viele Einträge 0 sind, oder modulo isomorpher Graphen behandelt werden können. Präsentieren Sie ihr Ergebnis daher in einem Graphen, dessen Knoten die Äquivalenzklassen der isomorphen Graphen aus $\mathcal{G}$ darstellen und welcher für positive Übergangswahrscheinlichkeiten entsprechend gelabelte Kanten enthält.

(b) Simulieren Sie einen Random Walk auf dem soeben definierten Graphen, indem Sie ausgehend von einem beliebigen Startknoten entsprechend der Kantengewichte zufällig[1] schrittweise voranschreiten. Notieren Sie, an welchen Knoten Sie sich zum Zeitpunkt $0, \ldots, 20$ befunden haben.

(c) Wie hängt dieses Verfahren mit dem in Aufgabe 2 präsentierten Algorithmus zusammen?

[1] Lassen Sie sich dafür z.B. von Java mittels `Math.random();` entsprechende Zufallszahlen generieren, oder verwenden Sie einen der zahlreichen Online-Zufallszahlengeneratoren.