Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Ulrik Brandes / Dr. Jürgen Lerner / Bobo Nick

9. Übungsblatt

Ausgabe: 21.6.2010 **Abgabe:** 28.6.2010, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: ERGM, Hammersley-Clifford 5 Punkte

Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller ungerichteten, schleifenfreien Graphen mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, N\}$. Durch $c\colon V \to \{A, B\}$ sei eine Aufteilung der Knoten in zwei diskunkte Klassen gegeben, $V = A \uplus B$. Die Klasse $\mathcal{K} = \{(\mathcal{G}, P)\}$ von Zufallsgraphenmodellen bestehe aus allen Modellen, die die folgende Unabhängigkeitsannahme erfüllen.

Für alle Paare von Dyaden d_1, d_2 gilt: d_1 und d_2 sind bedingt unabhängig, es sei denn die beiden folgenden Eigenschaften sind erfüllt:

- d_1 und d_2 sind inzident und
- alle Endpunkte (inzidente Knoten) von d_1 und d_2 liegen in derselben Klasse. Das heißt, falls $d_1 = \{u, v\}$ und $d_2 = \{x, y\}$, so gilt

$$c(u) = c(v) = c(x) = c(y) \ .$$

Geben Sie – unter Verwendung des Hammersley-Clifford Theorems – eine Menge von Statistiken an, so dass die daraus resultierende Klasse von ERGMs genau der Klasse $\mathcal{K}$ entspricht.

Tipp: Schauen Sie sich das Korollar über die Klasse von ERGMs eines allgemeinen Markov Zufallsgraphen an. Welche dieser Statistiken müssen weggelassen werden damit genau die Klasse $\mathcal{K}$ (und nicht mehr) reproduziert wird?

[Bitte wenden]

Aufgabe 2: ERGM, $\mathcal{G}(n, c, p_1, p_2)$ **6 Punkte**

Durch $c : V \to \{A, B\}$ sei eine Aufteilung der Knoten in zwei diskunkte Klassen gegeben, $V = A \uplus B$. Damit lässt sich analog zu $\mathcal{G}(n, p)$ ein Zufallsgraphen-Modell $\mathcal{G}(n, c, p_1, p_2)$ definieren, wobei p_1 die Wahrscheinlichkeit für eine Kante zwischen zwei Knoten aus der gleichen Klasse und p_2 die Wahrscheinlichkeit für eine Kante zwischen zwei Knoten aus unterschiedlichen Klassen definiere.

(a) Geben Sie ein auf zwei Statistiken basierendes ERGM an, welches $\mathcal{G}(n, c, p_1, p_2)$ entspricht.

(b) Wie lassen sich die Paramter p_1, p_2 des $\mathcal{G}(n, c, p_1, p_2)$ in die Parameter θ_1, θ_2 des ERGM umrechnen?

Aufgabe 3: Cliquen **9 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen schlichten, ungerichteten Graphen mit n Knoten gibt, der $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ maximale Cliquen verschiedener Größe enthält.

Tipp: Starten Sie mit einer großen maximalen Clique, die Sie geschickt erweitern.

(b) Zeigen Sie, dass für die Cliquenzahl eines schlichten, ungerichteten, *regulären* Graphen mit n Knoten entweder $\omega(G) \leq \frac{n}{2}$ oder $\omega(G) = n$ gilt.

Tipp: Es genügt zu zeigen: $\omega(G) > \frac{n}{2} \Rightarrow \omega(G) = n$.

(c) Zeigen Sie: Für beliebige $n, p \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ gibt es immer einen regulären Graphen G mit n Knoten und $\omega(G) = p$.

Tipp: Geben Sie einen geeigneten Torus an (vgl. Def 4.22 und Bsp 4.23 im Skript).