Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Ulrik Brandes / Dr. Jürgen Lerner / Bobo Nick

11. Übungsblatt

Ausgabe: 05.7.2010 **Abgabe:** 12.7.2010, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: Färbbarkeit — 6 Punkte

Einen schlichten ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ nennt man *k-färbbar*, wenn es eine Abbildung $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ gibt, so dass $f(v) \neq f(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$, wenn also keine adjazenten Knoten die selbe Farbe erhalten. Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist dann das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für das G k-färbbar ist.

Zeigen Sie: $\chi(G) \leq \mathit{core}(G) + 1$.

Aufgabe 2: Kerne — 6 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein schlichter, ungerichteter Graph und $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ eine Kantengewichtsfunktion. Ein inklusionsmaximaler Teilgraph $C_t(G) \subseteq G$ heißt *gewichteter t-Kern*, falls gilt:

$$\sum_{w \in N_{C_t(G)}(v)} f(\{v, w\}) \geq t \qquad \text{für alle } v \in C_t(G).$$

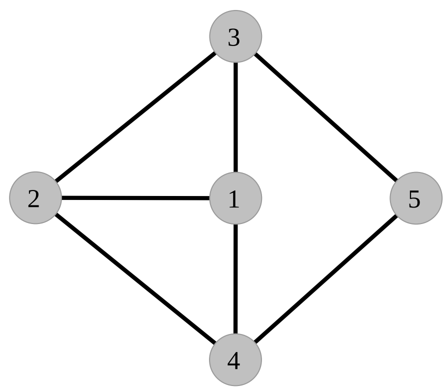
Geben Sie ein *einfaches* Verfahren zur Bestimmung des gewichteten t-Kerns an und zeigen Sie, dass es tatsächlich den (eindeutigen!) gewichteten t-Kern findet.

[Bitte wenden]

Aufgabe 3: Reguläre Äquivalenzen **8 Punkte**

Das reguläre Innere einer Partition ist das Supremum aller regulären Äquivalenzen, welche die Partition verfeinern.

Wir wollen nun zeigen, dass *die* reguläre Hülle einer Partition, also das Infimum aller regulären Äquivalenzen, welche die Partition vergröbern, im Allgemeinen nicht existiert (*) — dies wird das Ergebnis der letzten Teilaufgabe sein.



Sei dazu $\mathcal{R}$ die Menge der regulären Äquivalenzen auf dem dargestellten Graphen G. Wir definieren analog zur Vorlesung auf $\mathcal{R}$ eine partielle Ordnung $\preceq$ durch $\approx_1 \preceq \approx_2 \iff \approx_1 \subseteq \approx_2$. Damit bedeutet $\approx_1 \preceq \approx_2$, dass $\approx_1$ *feiner* als $\approx_2$ und $\approx_2$ *gröber* als $\approx_1$ ist.

(a) Stellen Sie $(\mathcal{R}, \preceq)$ in einem Hasse-Diagramm, also einem gerichteten Graphen mit Knotenmenge $\mathcal{R}$ und Kantenmenge

$$\{(\approx_v, \approx_w) \mid \approx_v, \approx_w \in \mathcal{R} \wedge \approx_v \preceq \approx_w \wedge \nexists \approx_u : \approx_v \preceq \approx_u \preceq \approx_w\},$$

dar.

(b) Geben Sie für jede nicht-triviale reguläre Äquivalenz eine geeignete Darstellung des Graphen an, also eine Darstellung, die die reguläre Äquivalenz widerspiegelt.
Tipp: In visone müssen die Knoten dafür nur hin und hergeschoben werden...

(c) Welche der regulären Äquivalenzen sind strukturelle Äquivalenzen?

(d) Finden Sie zwei reguläre Äquivalenzen, deren Schnitt nicht regulär ist. Warum ist (*) damit bewiesen?