

1. Übungsblatt

Ausgabe: 24.10.2005 **Abgabe:** 28.10.2005, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Soweit nicht anders angegeben, müssen grundsätzlich alle Aussagen bewiesen werden.

Bemerkung: Zur Verkürzung der Notation werden des öfteren Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ durch Angabe eines Funktionswertes definiert bzw. bezeichnet. So steht z. B. n^k für die Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; n \mapsto n^k$.

Aufgabe 1:

5 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle Funktionen $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\max(f, g) \in \Theta(f + g)$.

(b) Für alle Funktionen $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$f \in \Theta(n^k) \wedge g \in \Theta(n^l) \implies f \circ g \in \Theta(n^{k+l}) .$$

(c) Für alle Funktionen $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$f \in \Theta(n^k) \wedge g \in \Theta(n^l) \implies f \circ g \in \Theta(n^{k \cdot l}) .$$

(Das Symbol \circ bezeichnet die Verkettung von Funktionen: $f \circ g(n) := f(g(n))$.)

Aufgabe 2:

5 Punkte

Setzen Sie die folgenden Mengen zueinander in Beziehung (\subset , \supset , $=$):

(a) $\mathcal{O}(n^2)$ und $\mathcal{O}(n \log n)$

(b) $\Omega(2^n)$ und $\Omega(n^n)$

(c) $o(2^n)$ und $o(2^{n+1})$

[Bitte wenden]

Aufgabe 3:**5 Punkte**

Gegeben sei eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_i \in \mathcal{O}(n)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $F_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_k(n) := \sum_{i=0}^k f_i(n) .$$

Die Funktion $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(n) := \sum_{i=0}^n f_i(n) .$$

Ferner sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(n) := f_n(n) .$$

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $F_k \in \mathcal{O}(n)$.
- (b) Es gilt $F \in \mathcal{O}(n)$.
- (c) Es gilt $g \in \mathcal{O}(n)$.