Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Prof. Dr. U. Brandes / J. Lerner / B. Schlieper

Entwurf und Analyse von Algorithmen
WS 2005/2006

2. Übungsblatt

Ausgabe: 28.10.2005 **Abgabe:** 04.11.2005, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 4: 8 Punkte

Finden Sie je ein geeignetes g(n) und zeigen Sie dann durch Substitution, dass:

(a) $T(n) = 2T(n/2 + 17) + n \in \mathcal{O}(g(n))$.

(b) $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 17 \in \mathcal{O}(g(n))$.

(c) $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n \in \mathcal{O}(g(n))$.

Aufgabe 5: 12 Punkte

Diese Aufgabe behandelt die Multiplikation von Polynomen. Zuerst soll an einige grundlegende Definitionen erinnert werden.

Es seien

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} f_i X^i \qquad \text{und} \qquad g(X) = \sum_{i=0}^{n} g_i X^i$$

Polynome mit reellen Koeffizienten vom *Grad* kleiner gleich n. (Das Polynom f hat Grad gleich n falls $f_n \neq 0$.)

Die *Summe* von f und g ist definiert als das Polynom $h(X) = \sum_{i=0}^{n} h_i X^i$ mit $h_i = f_i + g_i$. Das *Produkt* von f mit g ist definiert als das Polynom

$$h(X) = \sum_{i=0}^{2n} h_i X^i \qquad \text{mit} \qquad h_i = \sum_{j+k=i} f_j g_k \ . \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass die Multiplikation und Addition von reellen Zahlen in konstanter Zeit ausgeführt werden können.

(a) Geben Sie die asymptotische Laufzeit für die Addition von zwei Polynomen vom Grad kleiner gleich n an.

[Bitte wenden]

(b) Geben Sie einen einfachen Algorithmus an, der bei Eingabe von f und g das Produkt $h = fg$ ausgibt, indem Sie die Koeffizienten von h nach Gleichung (1) berechnen. Geben Sie die Laufzeit dieses Algorithmus an.

Es sei nun n eine Zweierpotenz (d. h. $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$) und $m = n/2$. Wir bringen f und g in die Form

$$f = F_1 X^m + F_0 \qquad \text{und} \qquad g = G_1 X^m + G_0 \ ,$$

mit Polynomen F_1, F_0, G_1, G_0 vom Grad kleiner gleich m.

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$fg = F_1 G_1 X^n + (F_0 G_1 + F_1 G_0) X^m + F_0 G_0 \ . \tag{2}$$

(d) Geben Sie einen *rekursiven* Algorithmus zur Berechnung von $h = fg$ an. Nutzen Sie hierfür Gleichung (2). Zeigen Sie die Laufzeit dieses Algorithmus mit dem Aufteilungs-Beschleunigungs-Satz.

(e) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$fg = F_1 G_1 X^n + ((F_0 + F_1)(G_0 + G_1) - F_0 G_0 - F_1 G_1) X^m + F_0 G_0 \ . \tag{3}$$

(f) Geben Sie einen *rekursiven* Algorithmus zur Berechnung von $h = fg$ an. Nutzen Sie hierfür Gleichung (3). Zeigen Sie die Laufzeit dieses Algorithmus mit dem Aufteilungs-Beschleunigungs-Satz.

(g) Es sei nun n nicht mehr notwendigerweise eine Zweierpotenz. Geben Sie einen Algorithmus zur Berechnung von $h = fg$ an, der die selbe asymptotische Laufzeit wie in (f) hat.