

3. Übungsblatt

Ausgabe: 04.11.2005 **Abgabe:** 11.11.2005, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 6:

5 Punkte

Auf einer Datenstruktur wird eine Folge von Operationen ausgeführt. Zunächst verursacht jede Operation nur Kosten von 1, jedoch wird nach jeder j -ten Operation, für die j eine Zweierpotenz ist, eine Umstrukturierung durchgeführt, die Kosten in Höhe von j verursacht. Zeigen Sie mit der Buchungsmethode, dass der amortisierte Gesamtaufwand bei n Operationen in $\mathcal{O}(n)$ ist.

Aufgabe 7:

5 Punkte

Eine Warteschlange (Queue) ist eine Datenstruktur in die man Objekte einfügen und herausnehmen kann und die die folgende Eigenschaft erfüllt. Für alle Objekte o_i und o_j gilt: Falls o_i vor o_j eingefügt wurde, so wird o_i vor o_j herausgegeben.

Ein Stapel (Stack) ist eine Datenstruktur in die man Objekte einfügen und herausnehmen kann und die die folgende Eigenschaft erfüllt. Für alle Objekte o_i und o_j gilt: Falls o_i vor o_j eingefügt wurde, so wird o_i nach o_j herausgegeben.

Einfüge- und Rückgabe-Operationen haben jeweils eine Laufzeit in $\mathcal{O}(1)$.

Zeigen Sie, wie man eine Queue so mit zwei Stacks implementieren kann, dass der amortisierte Gesamtaufwand für n Einfüge- und Rückgabe-Operationen in $\mathcal{O}(n)$ liegt. Nutzen sie für den Beweis die Potentialmethode.

Aufgabe 8:**5 Punkte**

Es sei $P = p_1 p_2 \dots p_n$ eine Folge von Operationen, jede entweder vom Typ X oder vom Typ Y , wobei p_1 eine X - und p_2 eine Y -Operation ist. Die Laufzeit einer Y -Operation ist immer in $\mathcal{O}(1)$. Die Laufzeit der X -Operation p_1 ist konstant; jede weitere X -Operation hat eine Laufzeit, die doppelt so groß ist wie die Laufzeit der vorangegangenen X -Operation.

Geben Sie die amortisierte Laufzeit für n Operationen für jeden der drei folgenden Fälle an:

- (a) Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden X -Operationen ist mindestens eine Y -Operation.
- (b) Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden X -Operationen sind $\Theta(\sqrt{n})$ Y -Operationen.
- (c) Die Anzahl der Y -Operationen zwischen zwei aufeinanderfolgenden X -Operationen p_i und p_j ($i < j$) ist doppelt so groß wie die Anzahl der Y -Operationen zwischen p_i und ihrer vorangegangenen X -Operation.

Zeigen Sie jeweils, dass Ihre Abschätzung ideal ist, indem Sie eine Folge von n Operationen angeben, deren Laufzeit in keiner kleineren Komplexitätsklasse ist.

Aufgabe 9:**5 Punkte**

Ein Stack sei mittels Arrays implementiert. Ein Array der Länge k kann k Objekte speichern und bietet Zugriff auf jedes Objekt in konstanter Zeit. Ein Array kann aber nicht vergrößert oder verkleinert werden. Falls bereits k Objekte in einem Array der Länge k sind und ein weiteres eingefügt werden soll, so muss ein neues (größeres) angelegt und die k Objekte kopiert werden. Die Laufzeit für das Kopieren von k Objekten ist in $\mathcal{O}(k)$.

- (a) Geben Sie eine Vergrößerungs-Strategie an (unabhängig von n), die gewährleistet, dass die amortisierten Kosten für n Einfüge- und Löschoptionen in $\mathcal{O}(n)$ liegen.
- (b) Geben Sie Vergrößerungs- und Verkleinerungs-Strategien an, die zusätzlich die folgende Bedingung gewährleisten:
Sind m Objekte im Stack so ist die Größe des Arrays in $\mathcal{O}(m)$.

Beweisen Sie in beiden Fällen die Laufzeit für die amortisierten Kosten mit einer Methode ihrer Wahl.