

### 3. Übungsblatt

**Ausgabe:** 04.11.2005    **Abgabe:** 11.11.2005, 10 Uhr  
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

#### Aufgabe 6:

**5 Punkte**

Auf einer Datenstruktur wird eine Folge von Operationen ausgeführt. Zunächst verursacht jede Operation nur Kosten von 1, jedoch wird nach jeder  $j$ -ten Operation, für die  $j$  eine Zweierpotenz ist, eine Umstrukturierung durchgeführt, die Kosten in Höhe von  $j$  verursacht. Zeigen Sie mit der Buchungsmethode, dass der amortisierte Gesamtaufwand bei  $n$  Operationen in  $\mathcal{O}(n)$  ist.

#### Aufgabe 7:

**5 Punkte**

Eine Warteschlange (Queue) ist eine Datenstruktur in die man Objekte einfügen und herausnehmen kann und die die folgende Eigenschaft erfüllt. Für alle Objekte  $o_i$  und  $o_j$  gilt: Falls  $o_i$  vor  $o_j$  eingefügt wurde, so wird  $o_i$  vor  $o_j$  herausgegeben.

Ein Stapel (Stack) ist eine Datenstruktur in die man Objekte einfügen und herausnehmen kann und die die folgende Eigenschaft erfüllt. Für alle Objekte  $o_i$  und  $o_j$  gilt: Falls  $o_i$  vor  $o_j$  eingefügt wurde, so wird  $o_i$  nach  $o_j$  herausgegeben.

Einfüge- und Rückgabe-Operationen haben jeweils eine Laufzeit in  $\mathcal{O}(1)$ .

Zeigen Sie, wie man eine Queue so mit zwei Stacks implementieren kann, dass der amortisierte Gesamtaufwand für  $n$  Einfüge- und Rückgabe-Operationen in  $\mathcal{O}(n)$  liegt. Nutzen sie für den Beweis die Potentialmethode.

**Aufgabe 8:****5 Punkte**

Es sei  $P = p_1 p_2 \dots p_n$  eine Folge von Operationen, jede entweder vom Typ  $X$  oder vom Typ  $Y$ , wobei  $p_1$  eine  $X$ - und  $p_2$  eine  $Y$ -Operation ist. Die Laufzeit einer  $Y$ -Operation ist immer in  $\mathcal{O}(1)$ . Die Laufzeit der  $X$ -Operation  $p_1$  ist konstant; jede weitere  $X$ -Operation hat eine Laufzeit, die doppelt so groß ist wie die Laufzeit der vorangegangenen  $X$ -Operation.

Geben Sie die amortisierte Laufzeit für  $n$  Operationen für jeden der drei folgenden Fälle an:

- (a) Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden  $X$ -Operationen ist mindestens eine  $Y$ -Operation.
- (b) Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden  $X$ -Operationen sind  $\Theta(\sqrt{n})$   $Y$ -Operationen.
- (c) Die Anzahl der  $Y$ -Operationen zwischen zwei aufeinanderfolgenden  $X$ -Operationen  $p_i$  und  $p_j$  ( $i < j$ ) ist doppelt so groß wie die Anzahl der  $Y$ -Operationen zwischen  $p_i$  und ihrer vorangegangenen  $X$ -Operation.

Zeigen Sie jeweils, dass Ihre Abschätzung ideal ist, indem Sie eine Folge von  $n$  Operationen angeben, deren Laufzeit in keiner kleineren Komplexitätsklasse ist.

**Aufgabe 9:****5 Punkte**

Ein Stack sei mittels Arrays implementiert. Ein Array der Länge  $k$  kann  $k$  Objekte speichern und bietet Zugriff auf jedes Objekt in konstanter Zeit. Ein Array kann aber nicht vergrößert oder verkleinert werden. Falls bereits  $k$  Objekte in einem Array der Länge  $k$  sind und ein weiteres eingefügt werden soll, so muss ein neues (größeres) angelegt und die  $k$  Objekte kopiert werden. Die Laufzeit für das Kopieren von  $k$  Objekten ist in  $\mathcal{O}(k)$ .

- (a) Geben Sie eine Vergrößerungs-Strategie an (unabhängig von  $n$ ), die gewährleistet, dass die amortisierten Kosten für  $n$  Einfüge- und Löschoptionen in  $\mathcal{O}(n)$  liegen.
- (b) Geben Sie Vergrößerungs- und Verkleinerungs-Strategien an, die zusätzlich die folgende Bedingung gewährleisten:  
Sind  $m$  Objekte im Stack so ist die Größe des Arrays in  $\mathcal{O}(m)$ .

Beweisen Sie in beiden Fällen die Laufzeit für die amortisierten Kosten mit einer Methode ihrer Wahl.