

8. Übungsblatt

Ausgabe: 09.12.2005 **Abgabe:** 16.12.2005, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 23:

8 Punkte

Ein probabilistischer Algorithmus zum Bestimmen eines minimalen Schnittes in einem ungerichteten zusammenhängenden Multigraphen (Mehrfachkanten sind erlaubt) ohne Kantengewichte ist CONTRACT: Solange, bis nur noch zwei Knoten im Graphen vorhanden sind, wird in jedem Schritt zufällig eine Kante $\{u, v\}$ aus dem aktuellen Graphen ausgewählt (die Wahrscheinlichkeit gewählt zu werden sei dafür für alle Kanten gleich) und deren Knoten u und v vermolzen zu einem einzigen Knoten uv . Die Kante(n) $\{u, v\}$ wird/werden gelöscht, jede Kante $\{w, u\}$ oder $\{w, v\}$ (für ein w mit $u \neq w \neq v$) wird zu einer Kante $\{w, uv\}$. Die beiden Knoten die nach $n - 2$ Schritten übrig geblieben sind repräsentieren dann die beiden Knotenmengen eines Schnittes. Dieser Algorithmus hat natürlich keine Erfolgsgarantie, aber man kann die Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der ein minimaler Schnitt berechnet wird. Ein gegebener minimaler Schnitt $(S, V \setminus S)$ wird genau dann zerstört, wenn eine Schnittkante gelöscht wird, und damit ein Knoten aus S mit einem Knoten aus $V \setminus S$ verschmolzen wird.

Zeigen sie, dass für einen bestimmten minimalen Schnitt $(S, V \setminus S)$ gilt:

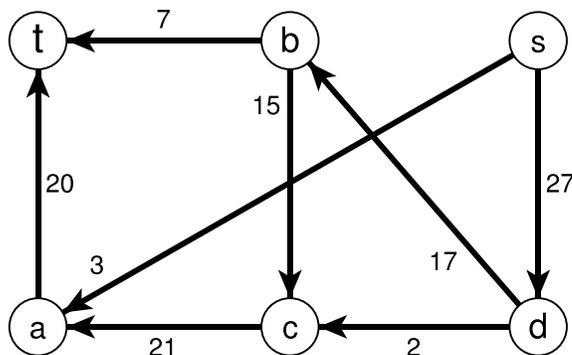
- Solange der minimale Schnitt noch nicht zerstört wurde, wird jedes Knotenpaar u, v entweder nur von Schnittkanten oder nur von Nicht-Schnittkanten verbunden.
- Sind bei einem Schritt im Graphen noch k Knoten vorhanden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass CONTRACT eine Kante aus dem Schnitt wählt kleiner gleich $\frac{2}{k}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser bestimmte minimale Schnitt $(S, V \setminus S)$ am Ende von CONTRACT erhalten geblieben ist, ist größer gleich $\frac{1}{\binom{n}{2}}$.

Zeigen Sie: Falls die Anzahl der verschiedenen minimalen Schnitte eines Graphen gleich K ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dass CONTRACT einen minimalen Schnitt berechnet größer gleich $K/\binom{n}{2}$.

Aufgabe 24:**3 Punkte**

Wie viele minimale Schnitte kann es in einem zusammenhängenden einfachen Graphen mit n Knoten maximal geben? Zeigen Sie, dass ihre Abschätzung optimal ist, indem Sie für jedes n einen zusammenhängenden Graph mit n Knoten angeben der die behauptete maximale Anzahl an minimalen Schnitten hat.

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 23.

Aufgabe 25:**9 Punkte**

Gegeben sei das obige Netzwerk $(D; s, t; c)$. Bestimmen Sie jeweils einen maximalen Fluss und geben Sie einen minimalen s - t -Schnitt an. Benutzen Sie:

- (a) Den Algorithmus von Ford & Fulkerson. Die erhöhenden Wege können hier frei gewählt werden. Geben Sie in jedem Schritt den erhöhenden Weg und den Betrag der Erhöhung an.
- (b) Den Algorithmus von Goldberg und Tarjan. Geben Sie in jedem Schritt an:
 - den ausgewählten aktiven Knoten;
 - die ausgewählte zulässige Operation/die beteiligten Knoten;
 - je nach Operation: den Wert Δ um den der Fluss auf einer Kante erhöht wurde, die neuen Flussüberschuß-, oder dist-Werte (jeweils nur für die Knoten bei denen eine Änderung stattgefunden hat).