Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Prof. Dr. U. Brandes / J. Lerner / B. Schlieper

Entwurf und Analyse von Algorithmen
WS 2005/2006

9. Übungsblatt

Ausgabe: 16.12.2005 **Abgabe:** 23.12.2005, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 26: **9 Punkte**

Ein *Multi-Source, Multi-Sink Netzwerk* ist ein Tupel $N = (D; \{s_1, \ldots, s_k\}, \{t_1, \ldots, t_\ell\}; c)$, wobei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit nichtnegativen Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\{s_1, \ldots, s_k\} \subset V$, $\{t_1, \ldots, t_\ell\} \subset V$ disjunkte Mengen von k Quellen und ℓ Senken sind. Ein *Fluss* in N ist definiert wie für gewöhnliche Netzwerke, nur dass hier die Flusserhaltungsbedingung für alle Quellen und alle Senken nicht erfüllt sein muss. Der *Wert* eines Flusses für N ist definiert wie für gewöhnliche Netzwerke, nur dass hier der herausfließende (Netto-)Fluss über alle Quellen summiert wird.

(a) Zeigen Sie wie man einen maximalen Fluss in N bestimmen kann indem man N in ein gewöhnliches Netwerk N' transformiert und einen maximalen Fluss in N' berechnet.

Zusätzlich zu N seien k reelle, nichtnegative Zahlen p_i und ℓ reelle, nichtnegative Zahlen q_j gegeben so dass $\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{j=1}^\ell q_j$ gilt.

(b) Geben Sie einen Algorithmus an der entscheidet ob es einen Fluss f (nicht notwendig maximal) in N gibt für den für jede Quelle s_i und für jede Senke t_j gelten

$$\sum_{v:(s_i,v)\in E} f(s_i, v) - \sum_{v:(v,s_i)\in E} f(v, s_i) = p_i \;; \qquad \sum_{v:(v,t_j)\in E} f(v, t_j) - \sum_{v:(t_j,v)\in E} f(t_j, v) = q_j$$

Mehrere Familien gehen zusammen in ein Restaurant zum Essen aus. Um ihre soziale Interaktion zu verbessern, möchten die Familien, dass an keinem Tisch zwei Leute sitzen, die der selben Familie angehören. Es gibt k Familien, und Familie i hat p_i Mitglieder. Außerdem gibt es ℓ Tische im Restaurant, und Tisch j hat q_j Plätze. Es gelte $\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{j=1}^\ell q_j$.

(c) Geben Sie einen Algorithmus an der entscheidet ob es eine Tischbelegung gibt, die den obigen Regeln entspricht? Modellieren Sie das Problem mit Hilfe eines Flussnetzwerks.

[bitte wenden]

Aufgabe 27: **5 Punkte**

Betrachten Sie ein Netzwerk $((V, E); s, t; c_E, c_V)$ (wobei $c_E\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $c_V\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$) bei dem es nicht nur Kapazitätsbedingungen auf den Kanten gibt, sondern bei dem die Menge des Flusses, der in einen Knoten hineinfließt, ebenfalls beschränkt ist. D. h. für einen Fluss $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelten neben den üblichen Flusserhaltungsbedingungen und Kapazitätsbedingungen für die Kanten noch zusätzlich für alle $v \in V$

$$\sum_{w:(w,v)\in E} f(w, v) \leq c_V(v).$$

Zeigen Sie, dass sich die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem solchen Netzwerk auf die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk, bei dem es nur Kantenkapazitäten gibt, zurückführen lässt.

Aufgabe 28: **6 Punkte**

Damit er in der Vorweihnachtszeit nicht so viel Arbeit hat, besorgt der Weihnachtsmann schon das ganze Jahr über Geschenke und notiert sich zu jedem Geschenk die Kinder, die sich darüber freuen würden. An Weihnachten möchte er dann alle Geschenke verteilen, so dass kein Kind mehr als ein Geschenk bekommt. (Für die Kinder, die leer ausgehen würden besorgt er natürlich noch Geschenke!)

(a) Formulieren sie das Problem als Max-Flow-Problem.

(b) Für eine Teilmenge A der Geschenkemenge G sei $K(A)$ die Menge der Kinder, die sich über ein Geschenk aus A freuen würden. Zeigen Sie, dass der Weihnachtsmann genau dann alle Geschenke verteilen kann, wenn für jedes $A \subset G$ gilt $|K(A)| \geq |A|$.