

Scale-Free vs. Attract & Introduce
Wer hat die höhere Fitness?

Mark Ortmann *

11. April 2010

Universität Konstanz
Fachbereich: Informatik und Informationswissenschaft
Projekt: Netzwerkmodelle WS09/10
Betreuer: Prof. Dr. Ulrik Brandes, Bobo Nick

*E-Mail: mark.ortmann@uni-konstanz.de

Inhaltsverzeichnis

1	Hintergrund	1
2	Test und Ergebnisse von Fowler et al.	2
3	Untersuchung des verwendeten Codes	3
4	Vererbungsstrategie	3
5	Verbesserung der Transitivitätskorrelation	5
6	Fazit	8
A	Plots	I
B	Source	IV

1 Hintergrund

Im Rahmen des Projekts „Netzwerkmodelle“ sollten sich die Teilnehmer kritisch mit der Veröffentlichung von Fowler et al. [8] auseinandersetzen. Fowler et al. stellen in dieser Arbeit ein neues Netzwerkmodell vor; das sog. „Attract and Introduce“ Modell, kurz A&I. Die Idee dieses Modells ist, dass sich soziale Netzwerke auf Grund zweier (genetischer) Eigenschaften, die jeder Partizipant dieses Netzwerks besitzt, entwickelt. Diese Eigenschaften sind

- *Attraktivität*, also das Interesse anderer diese Person kennenzulernen und
- *Integrationswillen*, sprich das Interesse seinen neuen Freund seinem Freundeskreis vorzustellen.

Um zu zeigen, dass das A&I-Modell die Realität besser beschreibt als andere Netzwerkmodelle, vergleichen Fowler et al. diese mit den folgenden Netzwerkmodellen:

- Zufallsgraphen [7]
- Exponentielle Zufallsgraphen Modell [11]
- Latent Space Modell [10]
- Social Space Modell [3]
- Fitness Modell [2]

Die *Verwendung und Verbesserung* des Fitness Modells hinsichtlich der Ergebnisse von Fowler et al., die in der folgenden Sektion vorgestellt werden, war Aufgabe meines Projekts.

Das Fitness-Modell generiert ungerichtete Netzwerke basierende auf folgenden zwei Charakteristika:

- *Wachstum*: Ausgehend von m_0 Knoten, wird in jedem Zeitschritt ein neuer Knoten ins Netzwerk eingefügt, der $m \leq m_0$ Kanten ausprägt.
- *Bevorzugung*: Die Wahrscheinlichkeit, dass der neue Knoten zum Knoten i eine Kante ausprägt ist

$$\pi_i = \frac{\eta_i \text{deg}(i)}{\sum_j \eta_j \text{deg}(j)}.$$

Hierbei ist η_i die Fitness des Knotens i , die über die Zeit unveränderlich ist und im Intervall $[0, 1]$ liegt. ¹

Im Folgenden werden die Tests und die Ergebnisse von Fowler et al. vorgestellt.

¹Ist die Fitness jedes Knotens gleich 1, so reduziert sich das Fitness-Modell auf das BA-Modell [1]

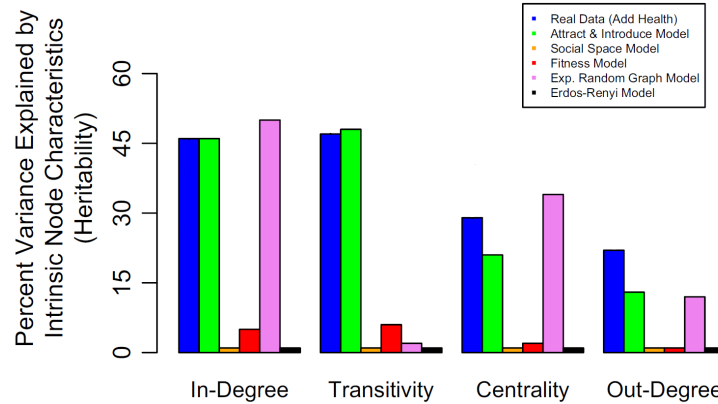


Abbildung 1: Ergebnisse von Fowler et al. [8]

2 Test und Ergebnisse von Fowler et al.

Um quantitative Aussagen zur Qualität des A&I- und der anderen Modelle machen zu können, benutzen Fowler et al. die sog. Spiegelnetzwerk-Methode. Bei dieser Methode, werden zwei Netzwerke mit gleicher Knoten- und Kantenzahl² generiert. Ferner wird vor der Modellierung aus beiden Netzwerken jeweils ein Knoten ausgewählt und diese sollen *Zwillinge* darstellen. Zwischen diesen Zwillingen werden die Parameter (Gene) vererbt. Nach 10000 Simulationen berechnen Fowler et al. die Korrelationen für

- Eingangsgrad
- Ausgangsgrad
- Transitivität
- Betweenness

zwischen den Zwillingen.

Die durch die Spiegelnetzwerk-Methode errechneten Ergebnisse vergleichen sie anschließend mit den Ergebnissen, die sie aus der *National Longitudinal Study of Adolescent Health*, „AddHealth“, bzgl. eineiiger Zwillinge erhalten. In Abbildung (1) sind die Resultate der AddHealth-Studie und der Spiegelnetzwerk-Methode angewandt auf die unterschiedlichen Netzwerkmodelle zu sehen. Wie aus der Abbildung ersichtlich wird, kann kein anderes Modell so gut wie das A&I-Modell die Ergebnisse modellieren, die die AddHealth-Studie beinhaltet.

²Insofern es das Modell zulässt

Das schlechte Abschneiden des Fitness-Modells v.a. bzgl. der Eingangs- und Ausgangsgradkorrelation lässt Zweifel hinsichtlich der korrekten Durchführung der Tests aufkommen. Daher war mein erster Schritt bei der Suche nach dem Grund für diese Resultate die Untersuchung des von Fowler et al. verwendeten Codes auf Fehler oder Schwachstellen.

3 Untersuchung des verwendeten Codes

In der verwendeten Implementation, vgl. Abb. (B1), die in den Supporting Information von [8] zu finden ist, finden sich keine gravierenden Mängel. Die nun angeführten Punkte sind lediglich Abweichungen von der Spezifikation von Bianconi und Barabási [2].

- Die Fitness wird aus dem Intervall $(0, 1)$ gezogen
- Im Initialgraph m_0 haben beide Knoten den Grad 2
- Die Wahrscheinlichkeit π einiger Knoten kann 100% übersteigen
- Der Ausgangsgrad m variiert

Da im verwendeten Code keine Fehler zu finden sind, ist die angewandte Vererbungsstrategie für das Fitness-Modell in der Spiegelnetzwerk-Methode zu hinterfragen.

4 Vererbungsstrategie

In der Spiegelnetzwerk-Methode wird für das Fitness-Modell zwischen den Zwillingen die Fitness vererbt. Da das Knotengradwachstum in diesem Modell, sowohl von der Fitness als auch vom Eintrittszeitpunkt des Knotens abhängig ist, war die erste Frage, die ich untersucht habe, ob es sinnvoll ist die Fitness zu vererben.

Um diese Frage beantworten zu können, habe ich die Eingangsgraddifferenz der Zwillinge in Abhängigkeit vom Eintrittszeitpunkt der Zwillinge ins Netzwerk und ihrer Fitness untersucht. Die Plots hierzu können in Abb. (A1) angesehen werden. Sie weisen darauf hin, dass die geringe Korrelation des Eingangsgrades auf Knoten, die vor $t = 188$ eingefügt werden, zurückzuführen ist. Ferner kann man sehen, dass das Kopieren der Fitness nur bei niedriger Fitness der Zwillinge dazu führt, dass die absolute Eingangsgraddifferenz gering ist. Je höher die Fitness der Knoten ist, desto stärker macht sich der Einfluss der unterschiedlichen Eintrittszeitpunkte bemerkbar. Bemerkbar heißt hier, dass die absolute Eingangsgraddifferenz stark ansteigt.

Somit lässt sich festhalten: das Vererben macht sich nur bei Knoten welche früh ins Netzwerk eintreten bemerkbar. Denn später eingefügte Knoten haben in diesem Modell ein generelles Problem Kanten zu erwerben, vgl. Abb. (A2).

Des Weiteren lässt sich nun die Frage hinsichtlich des Nutzens dieser Vererbungsstrategie klar beantworten. Es zeigt sich nämlich, dass es nützlich ist, die Fitness zu vererben. Jedoch hauptsächlich wenn diese sehr gering ist und der Eintrittszeitpunkt der Zwillinge ähnlich ist. Der Grund, dass geringe Fitness auch nur eine geringe Knotengradifferenz erzeugt, ist offensichtlich da in diesem Modell Knoten mit geringer Fitness nur wenige Kanten erhalten.

Aufgrund dieser Ergebnisse habe ich mir die Frage gestellt, ob es nicht besser ist anstatt der Fitness den Einfügezeitpunkt zu vererben.

Um diese Frage beantworten zu können, habe ich analog zum vorhergehenden Test Simulationen durchgeführt und Plots erstellt. Hier habe ich die Eingangsgradifferenz in Abhängigkeit der absoluten Fitness-Differenz und des Eintrittszeitpunkt untersucht. Die Plots hierzu können Abb. (A3) entnommen werden. Es lässt sich zeigen, dass auch hier nur Knoten, die früh ins Netzwerk eintreten eine hohe absolute Eingangsgradifferenz erzeugen, wie schon oben geschlussfolgert. Ferner zeigt sich hier, dass die absolute Eingangsgradifferenz proportional zur absoluten Fitnessdifferenz steigt.

Somit zeigt sich, dass das Kopieren der Zeit gute Ergebnisse, sprich geringer Eingangsgradifferenzen, erzeugt. Jedoch kann das Vererben des Einfügezeitpunkts das Problem der stark unterschiedlichen Eingangsgrade nicht lösen, wenn die Fitness der Zwillinge stark voneinander abweicht.

Das Fazit dieser Untersuchung ist, dass beide Vererbungsstrategien ihre Berechtigung haben, jedoch die Schwäche jeweils das Fehlen des nicht vererbten Faktors ist. Im dritten Schritt habe ich beide Faktoren vererbt. Diese Strategie ist auch nur gerecht, da auch bei der Spiegelnetzwerk-Methode des A&I-Modells sowohl Attraktivität als auch Integrationswille vererbt werden. Wie Abbildung (A4) impliziert muss diese Strategie zu einer hohen Korrelation des Eingangsgrad führen.

Tabelle (1) können die Ergebnisse für die verschiedenen Korrelationen unter Verwendung unterschiedlicher Vererbungsstrategien entnommen werden. Die Korrelationen für den Ausgangsgrad sind hier nicht aufgeführt, da diese bei der Spezifikation nach Bollobás et al. [4,5] immer 1 sind. Des Weiteren wird aus der Tabelle ersichtlich, dass das Vererben der Zeit einen stärkeren Einfluss hinsichtlich des Eingangsgrads und der Betweenness Korrelation hat als das Vererben der Fitness. Aus der Arbeit von Fowler et al. geht leider nicht hervor, wieso diese Strategie nicht berücksichtigt wurde. Weiterhin wirft das gute Ergebnis des *BA-Modells* [1] die Frage auf, wieso man überhaupt das Fitness-Modell verwendet hat.

Es zeigt sich erwartungsgemäß eine sehr hohe, über 85% liegende, Korrelation für den Eingangsgrad und die Betweenness, wenn beide Faktoren vererbt werden.

Kopieren von	Code von Fowler		
	corindeg	cortr	corbe
Nichts	0.013 (-)	0.015 (-)	0.004 (-)
Fitness	0.018 (-)	0.062 (-)	0 (-)
Zeit	0.424 (++)	0.012 (-)	0.465 (++)
Zeit und Fitness	0.901 (++)	0.118 (++)	0.883 (++)
	Fitness-Modell nach Spez. von Bollobás et al.		
	corindeg	cortr	corbe
Nichts	0 (++)	-0.036 (-)	-0.003 (-)
Fitness	0.013 (-)	0.033 (-)	0.033 (-)
Zeit	0.597 (++)	-0.001 (-)	0.752 (++)
Zeit und Fitness	0.92 (++)	0.101 (+)	0.939 (++)
	BA-Modell		
	corindeg	cortr	corbe
Zeit	0.620 (++)	0.035 (-)	0.475 (++)
	Attract & Introduce		
Attract und Introduce	0.46	0.48	0.29

Tabelle 1: Korrelationen der Zwillinge bei unterschiedlicher Vererbungsstrategie (1000 Testläufe); (-) = Signifikanzniveau > 0.05 , (+) $0.001 < \text{Signifikanzniveau} < 0.01$, (++) = Signifikanzniveau < 0.001

Da es mir nicht darum ging, den Ergebnissen der AddHealth-Studie möglichst nahezukommen, sondern vielmehr zu zeigen, dass genetisch identische Menschen sich unabhängig von ihrer Umwelt gleich entwickeln³, ist nur die Korrelation der Transitivität verbesserungswürdig. In allen anderen Punkten führt nur die Veränderung der Vererbungsstrategie und die Anwendung der Spezifikation von Bollobás et al. zu besseren Ergebnissen als es das A&I-Modell kann. Somit war mein nächstes Ziel die Verbesserung dieser Korrelation.

Modifikationen der Implementation werden im Folgenden präsentiert.

5 Verbesserung der Transitivitätskorrelation

Weil es eine Vielzahl von Möglichkeiten gibt, um Transitivität in dieses Modell zu integrieren, habe ich mir zuerst selbst einen Rahmen gegeben, in welchem sich meine Modifikationen abspielen durften. Dieser Rahmen war:

- Die Knotengradverteilung soll einem Potenzgesetz folgen, wie es eben für die Scale-Free Modelle charakteristisch ist.
- Die Kantenzahl soll nicht zu stark vom Richtwert 3150 abweichen.
- Die Charakteristika des Scale-Free Modells sollen beibehalten werden, d.h. v.a. keine Kantenausbildung, nachdem das Netzwerk vollständig erstellt wurde.
- Es werden immer beide Faktoren vererbt, soweit vorhanden.
- Verbot von Schleifen und Mehrfachkanten. Daher wird hier mit Initialgraphen gearbeitet.

³Also alle Korrelationen bei 100% liegen, dies ist der Grundgedanke von Fowler et al..

Nachstehend werden die Grundideen der verschiedenen Modifikationen und ihre Umsetzungen vorgestellt.

Idee: Manipulation der Fitness ausgewählter Knoten

Umsetzung: Immer wenn der gerade ins Netzwerk eingefügte Knoten i eine Kante zu einem Knoten v ausgebildet hat, werden die Fitness-Parameter der Nachbarn von v auf 1 gesetzt. Diese Veränderung bleibt solange bestehen bis i , alle Kanten ausgeprägt hat.

Diese Veränderung führt jedoch nicht zu dem gewünschten Ergebnis, wie man der folgenden Tabelle entnehmen kann. Ganz im Gegenteil verschlechtert sie die anderen Korrelationen.

corindeg	cortr	corbe
0.67 (++)	0.08 (+)	0.56 (++)

Idee: Bevorzugung anhand des PageRanks, anstatt des Knotengrades

Der PageRank von Seite A ist definiert als

$$PR(A) = (1 - d) + d \left(\frac{PR(T1)}{outdeg(T1)} \right) + \dots + d \left(\frac{PR(Tk)}{outdeg(Tk)} \right),$$

wobei $0 < d < 1$ der Dämpfungfaktor ist und $T1, \dots, Tk$, diejenigen Seiten sind, die eine gerichtete Kante zu A haben.

Der Nebeneffekt des Ausnutzens einer solchen Rückkopplungszentralität ist, dass sich automatisch auch der PageRank der Nachbarseiten der Knoten erhöht, die eine neue Kante erhalten haben. Dieses Verhalten sollte daher eine Verbesserung der Transitivität zufolge haben.

Umsetzung: $\pi_i = \frac{PR(i)}{\sum_j PR(j)}$ mit $d = 0.4$ und $d = 0.85$,⁴

Wie man der Tabelle entnehmen kann ist die Korrelation der Transitivität für das Fitness-Modell mit Bevorzugung anhand des PageRanks mit $d = 0.85$ 27%. Jedoch erfüllt dieses Modell nicht die Zielsetzung, da es keine Potenzgesetzverteilung des Knotengrades erzeugt, vgl. Abb. (A5).

⁴Für beide Werte weisen die Netzwerke eine Potenzgesetzverteilung auf [9].

Fitness	d	corindeg	cortr	corbe
nein	0.4	0.83 (++)	0.05 (-)	0.78 (++)
ja	0.4	0.96 (++)	0.11 (++)	0.96 (++)
nein	0.85	0.95 (++)	0.06 (-)	0.94 (++)
ja	0.85	0.99 (++)	0.27 (++)	0.98 (++)

Idee: Ausbilden von Kanten⁵ innerhalb der Nachbarschaft des neuen Knoten v

Umsetzung: Nachdem v alle Kanten ausgeprägt hat, werden die Nachbarn v bestimmt. Eine Kante wird zwischen den Nachbarn i, j von v ausgeprägt, wenn $runif(1) \leq \max(\eta_i, \eta_j)$.

Da dieses Vorgehen zu Variationen im Ausgangsgrad führt, ist in der nachfolgenden Tabelle auch die Korrelation des Ausgangsgrades enthalten. Wie man

	d	corindeg	coroutdeg	cortr	corbe
Grad	-	0.72 (++)	0.77 (++)	0.18 (+)	0.74 (++)
PageRank	0.4	0.46 (++)	0.59 (++)	0.23 (+)	0.33 (++)
PageRank	0.85	0.71 (++)	0.68 (++)	0.16 (+)	0.82 (++)

sehen kann ist v.a. für die Modifikation mit PageRank und $d = 0.4$ die Korrelation der Transitivität stark gestiegen im Gegensatz zu dem Standardmodell. Jedoch zeigt sich auch, dass sich die Korrelationen in den anderen Maßen stark verschlechtern.

Idee: Ausprägen von Kanten vom neuen Knoten v zu den Nachbarn seines neuen Nachbarn

Umsetzung: Nach jeder von v ausgeprägten Kanten zu einem Knoten u , wird v die Nachbarschaft von u vorgestellt (ähnlich wie der Integrationsmechanismus von A&I). Falls die Fitness des Nachbarn von u kleiner ist als dessen Wahrscheinlichkeit π prägt v eine Kante zu diesem Knoten aus. Wie man den Er-

	d	corindeg	coroutdeg	cortr	corbe
Grad	-	0.99 (++)	0.06 (+)	0.15 (++)	0.92 (++)
PageRank	0.4	0.96 (++)	0.21 (++)	0.12 (+)	0.81 (++)
PageRank	0.85	0.99 (++)	0.33 (++)	0.16 (++)	0.88 (++)

gebnissen entnehmen kann, schafft auch diese Modifikation es nicht die Transitivitätskorrelation um das gewünschte Maß zu erhöhen.

⁵Diese Idee geht zurück auf Dorogovtsev und Mendes [6].

Idee: Aufwerten und Abschwächen der Wahrscheinlichkeiten

Umsetzung Nachdem der neue Knoten v seine erste Kante zu einem Knoten u ausgebildet hat, werden die Knotengrade wie folgt manipuliert

- Für $w \in N(u)$ wird der Grad auf $deg(w) = \eta_w maxDegree + deg(w)$ gesetzt
- Für $w \notin N(u)$ wird der Grad auf $deg(w) = (1 - \eta_w)deg(w)$ gesetzt

und eine neue Kante eingefügt. Obwohl dieses Vorgehen eine hohe Transitivität

	d	corindeg	cortr	corbe
Grad	-	0.82 (++)	0.07 (+)	0.74 (++)
PageRank	0.4	0.83 (++)	0.10 (++)	0.78 (++)
PageRank	0.85	0.82 (++)	0.31 (++)	0.71 (++)

im Netzwerk hervorrufen muss, gelingt es mit dieser Modifikation nicht einmal die Korrelation auf das Niveau des A&I-Modells zu bekommen. Um den Effekt nochmal zu verstärken, habe ich anschließend den Fitness-Parameter für alle Knoten auf 1 gesetzt. Diese Vorgehen hat zufolge, dass der neue Knoten nur noch Kanten zu Nachbarn seiner Nachbarn ausprägen kann. Die so erhaltenen Ergebnisse schaffen es erstmals die Werte des A&I-Modells in jeglicher Hinsicht

	d	corindeg	cortr	corbe
Grad	-	0.79 (++)	0.43 (++)	0.91 (++)
PageRank	0.4	0.81 (++)	0.51 (++)	0.64 (++)
PageRank	0.85	0.95 (++)	0.43 (++)	0.97 (++)

zu übertreffen. Betrachtet man sich jedoch die Knotengradverteilungen dieser Modelle, so fällt auf, dass diese keinem Potenzgesetz mehr folgen, vgl. Abb. (A6). Somit fallen diese Modelle nicht in den von mir gesetzten Rahmen.

6 Fazit

In diesem Bericht konnte gezeigt werden, dass schon durch das Vererben der Zeit anstatt der Fitness und Abändern der Spezifikation des Fitness-Modells das A&I-Modell hinsichtlich der Korrelationen in Eingangs-, Ausgangsgrad und Betweenness problemlos überboten werden kann. Diese Ergebnisse konnten durch das Vererben beider Faktoren nochmals verbessert werden.

Alle Versuche, die Transitivitätskorrelation zu verbessern, haben nicht zum gewünschten Ergebnis geführt. Entweder deshalb, weil die Werte an sich zu schlecht sind, oder weil die Modifikationen nicht den selbst gesetzten Rahmen entsprachen. Betrachtet man sich v.a. die letzte Modifikation bei der alle Fitness-Parameter auf 1 gesetzt werden, so bleibt es doch fraglich inwiefern dieses Modell

überhaupt sinnvoll ist.

Eine Erklärung für das Fehlschlagen all meiner Modifikationen ist wahrscheinlich auf den Wachstumscharakter dieses Netzwerkmodells zurückzuführen. Generell sollte man sich die Frage stellen, ob dieses Modell überhaupt den Anspruch erhebt, ein so geartetes Netzwerk zu modellieren und somit ein Vergleich überhaupt sinnvoll sein kann.

Weiterhin ist die Aussagekraft der Korrelationen zu überdenken und ob diese Vergleichsmethode nicht vielmehr ein Modell bevorzugt, das nur eine geringe Bandbreite an Netzwerken generieren kann. Denn es steht außer Frage, dass in diesem Vergleich das Modell gewinnt, das immer das gleiche Netzwerk generiert und bei dem ein einziger Parameter eine immens hohe Aussagekraft besitzt.

A Plots

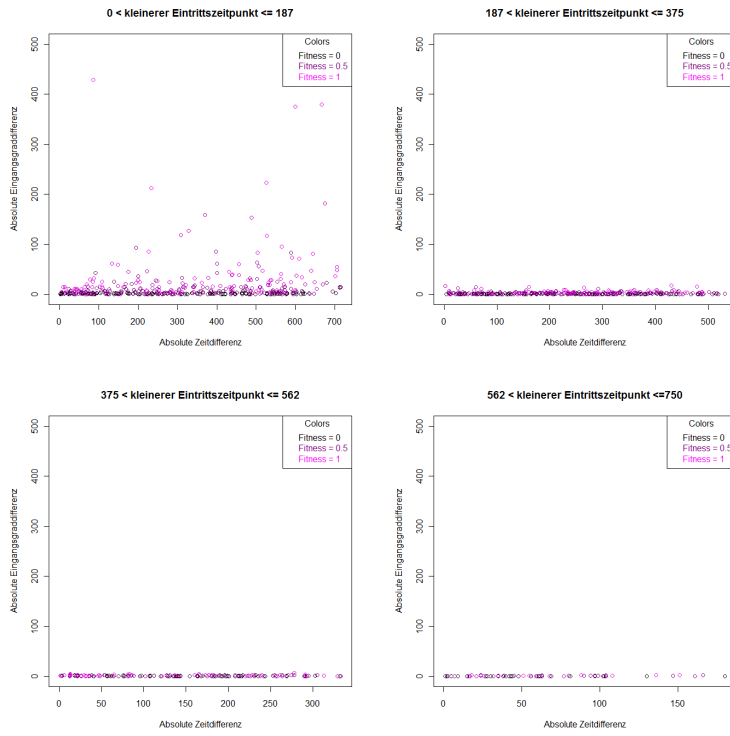


Abbildung A1: Spiegel-Netzwerk: Fitness-Modell mit Vererbung des Fitness-Parameter

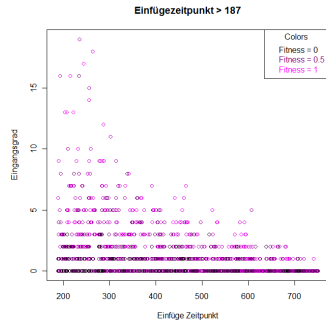


Abbildung A2: Spiegel-Netzwerk: Fitness-Modell, Eingangsgrad der Knoten welche zum Zeitpunkt $t > 187$ das Netzwerk betreten

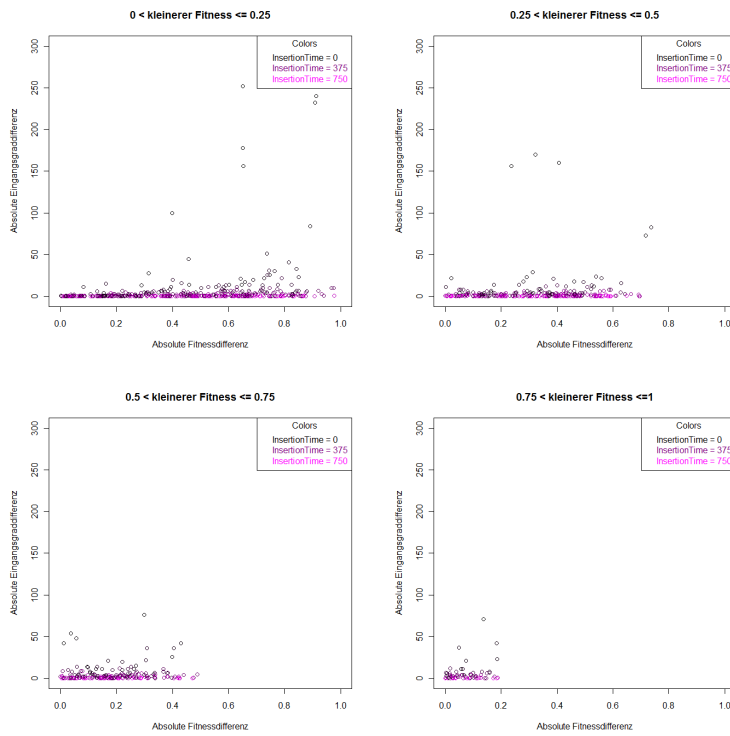


Abbildung A3: Spiegel-Netzwerk: Fitness-Modell mit Vererbung des Einfügezeitpunkts

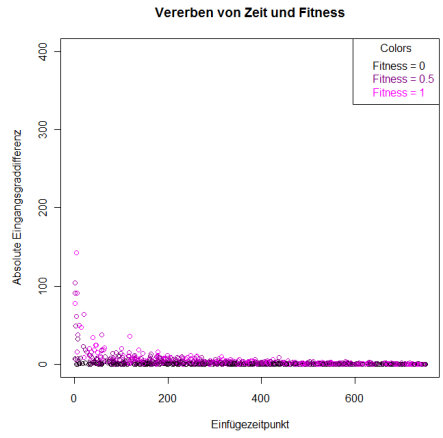


Abbildung A4: Visualisierung der absoluten Eingangsgradifferenz in Abhängigkeit von Einfügezeitpunkt und Fitness der Zwillinge bei Vererbung beider Faktoren

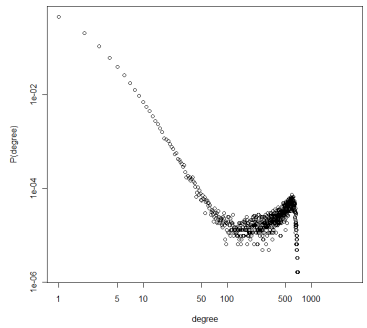


Abbildung A5: Knotengradverteilung von Fitness-Modell basierend auf PageRank mit $d = 0.85$

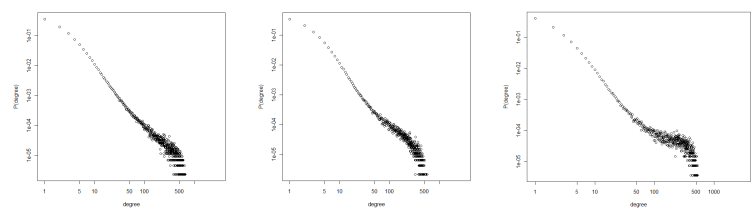


Abbildung A6: v.l.n.r. Bevorzugung abhängig von: Grad, PageRank mit $d = 0.4$, PageRank mit $d = 0.85$; Fitness für alle Knoten gilt $\eta = 1$

B Source

Code for “Fitness” model and “Mirror Network” method

```
# R code for fitness model
# using a mirror network method to measure
# the extent to which this model generates
# heritability of network characteristics
#
# NOTE: Many thanks to Referee 2 who wrote
# some of this code

rm(list=ls())

library(igraph) # Thanks to Gabor Csardi for the igraph package!

n<-750 # number of nodes
e<-3150 # number of edges
m<-e/n # average number of edges per node (degree)

T<-10000 # number of simulations

twindeg1 <- rep(0, times=T)
twoutdeg1 <- rep(0, times=T)
twtr1 <- rep(0, times=T)
twbe1 <- rep(0, times=T)

twindeg2 <- rep(0, times=T)
twoutdeg2 <- rep(0, times=T)
twtr2 <- rep(0, times=T)
twbe2 <- rep(0, times=T)

for(t in 1:T) { # do simulation run

  if(t%%100==0) print(t)

  # randomly choose one individual to be a twin
  twin1 <- sample(n,1)
  twin2 <- sample(n,1)

  # create first set of individual traits
  d1<-runif(n) # distribution of fitness

  # create original network
  g1<-graph.empty(n)
  g1<-add.edges(g1,c(0,1,1,0)) # initialize network
  for(i in 2:(n-1)) {
    p<-degree(g1,v=0:(i-1))*d1[1:i]
    p<-m*p/sum(p)
    ins<-which(runif(i)<p)
    if(length(ins)>0) g1<-add.edges(g1,c(rbind(i,ins-1)))
    g1<-simplify(g1)
  }

  # create second set of individual traits
  d2<-runif(n) # distribution of fitness

  # copy genes
  d2[twin2] <- d1[twin1]

  # create mirror network
  g2<-graph.empty(n)
  g2<-add.edges(g2,c(0,1,1,0))
  for(i in 2:(n-1)) {
    p<-degree(g2,v=0:(i-1))*d2[1:i]
    p<-m*p/sum(p)
    ins<-which(runif(i)<p)
    if(length(ins)>0) g2<-add.edges(g2,c(rbind(i,ins-1)))
    g2<-simplify(g2)
  }
}
```

Abbildung B1: Verwendete Implementation von Fowler et al.

Literatur

- [1] A.L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [2] G. Bianconi and A. L. Barabási. Competition and multiscaling in evolving networks. *Europhysics Letters*, 54(4):436–442, 2001.
- [3] M. Boguñá, R. Pastor-Satorras, A. Díaz-Guilera, and A. Arenas. Models of social networks based on social distance attachment. *Physical Review E* 70, 2004.
- [4] B. Bollobás, Riordan. O., J. Spencer, and G. E. Tusnády. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Struct. Algorithms*, 18(3):279–290, 2001.
- [5] U. Brandes. Modelle und statistiken. In *Methoden der Netzwerkanalyse Skript*, pages 110 – 125. 2005.
- [6] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes. Scaling behaviour of developing and decaying networks. *Europhysics Letters*, 52(1):33–39, 2000.
- [7] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs. I. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [8] J. H. Fowler, C. T. Dawes, and N. A. Christakis. Model of genetic variation in human social networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 106(6):1720–1724, 2009.
- [9] C. Guo and Zhang. L. An improved ba model based on the pagerank algorithm. In *WiCOM '08*, pages 1–4, 2008.
- [10] P. D. Hoff, A. E. Raftery, and M. S. Handcock. Latent space approaches to social network analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 97(460), 2002.
- [11] T. A. B. Snijders, P. E. Pattison, G. L. Robins, and M. S. Handcock. New specifications for exponential random graph models. 2006.