Universität Konstanz

Diplomarbeit

Nichtlineare Wärmeleitung mit „second sound“

Verfasser: Natalie Indlekofer
Betreuer: Prof. Dr. Reinhard Racke

eingereicht am: 5. Dezember 2007

Gutachter: Prof. Dr. Reinhard Racke
Prof. Dr. Robert Denk

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem, das für passende Materialien die Wärmeleitung in einer Dimension modelliert. Die physikalische Herleitung der Gleichungen soll hier nur knapp angedeutet werden. Für eine genauere Ausführung sei auf [5] verwiesen.
Wir werden das Problem für beschränkte Gebiete, im eindimensionalen Fall also beschränkte Intervalle J, betrachten. Die auftretenden Größen sind der *Wärmefluss* q und die *absolute Temperatur* $\theta > 0$, die von der Zeit $t \geq 0$ und dem Ort $x \in J$ abhängen.
Wir gehen davon aus, dass das Medium so beschaffen ist, dass das *Energiegleichgewicht* durch die Gleichung

$$e_t + q_x = r \tag{0.1}$$

ausgedrückt werden kann, wobei die Funktion $e = e(q, \theta)$ noch genauer beschrieben werden wird und die Funktion $r = r(t, x)$ eine von außen einwirkende Kraft beschreibe.
Die zweite Gleichung des Systems sei nicht, wie im *klassischen* Modell nach *Fourier* die Relation $q = -\chi(\theta)\theta_x$, sondern das nach *Cattaneo* benannte *Wärmeleitungsgesetz*

$$\tau(\theta)q_t + q = -\chi(\theta)\theta_x \tag{0.2}$$

mit noch näher zu bestimmenden positivwertigen Koeffizientenfunktionen τ und χ.
Man spricht in diesem Fall auch häufig von *Wärmeleitung mit „second sound“*.
Für konstante Koeffizienten bewirkt der zusätzliche Summand τq_t, dass das resultierende System hyperbolisch ist. Im Gegensatz zum klassischen parabolischen System, suggeriert dieses Model nicht, dass sich thermische Veränderungen in einem Punkt mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Obwohl dieses physikalische Paradoxon in vielen Fällen vernachlässigt werden kann, gibt es doch Problemstellungen, für die das klassische Modell unpassend erscheint. Der Unterschied beider Modelle spielt beispielsweise bei der Reinigung von Halbleitern durch Laserimpulse (siehe dazu auch [20],[11],[17]) eine Rolle.
Auch in Verbindung mit Thermoelastizitätssystemen wird und wurde der „second sound effect“, z.B. in [13],[3] und [4], untersucht.
In [4] wurde gezeigt, dass die Gleichungen (0.1) und (0.2) aufgrund des zweiten Gesetzes der Thermodynamik nur dann ein physikalisch sinnvolles Modell darstellen, wenn die Funktion

e von der Form

$$e(q,\theta) \equiv e_0(\theta) + a(\theta)q^2 \tag{0.3}$$

mit $a(\theta) = \frac{1}{\theta}\frac{\tau(\theta)}{\chi(\theta)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau(\theta)}{\chi(\theta)}\right)'$ ist. e_0 sei hierbei eine differenzierbare Funktion, für deren Ableitung

$$\left(e_0(\theta)\right)_t = c_0(\theta)\theta_t \qquad \text{mit} \quad c_0 > 0 \tag{0.4}$$

gilt.
Wir werden im Folgenden allerdings nicht voraussetzen, dass a die beschriebene Gestalt hat. (0.3) eingesetzt in (0.1) ergibt zusammen mit (0.2) das folgende System

$$\tau(\theta)q_t + q + \chi(\theta)\theta_x = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{0.5}$$

$$q_x + c_0(\theta)\theta_t + a'(\theta)q^2\theta_t + 2a(\theta)qq_t = r \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J. \tag{0.6}$$

In [5] wird gezeigt, dass für $J = \mathbb{R}$, $r \equiv 0$ und bestimmte Anfangsdaten (q_0, θ_0) eine globale klassische Lösung zu (0.5) und (0.6) existiert, wenn die Koeffizientenfunktionen mindestens

$$\tau, \chi, c_0 \in C^2(\mathbb{R}^+), \quad a \in C^3(\mathbb{R}^+) \quad \text{und} \quad \tau, \chi, c_0 > 0 \tag{0.7}$$

erfüllen. Zusätzlich zur Existenz einer eindeutigen Lösung wird dort auch deren Konvergenzverhalten für $t \to \infty$ untersucht. Insbesondere wird bewiesen, dass *Gleichgewichtslösungen*, d.h. konstante Lösungen, der Form $(q,\theta) \equiv (0,\bar{\theta})$, für ein $\bar{\theta} > 0$, stabil sind.
Außerdem wird in [5] darauf hingewiesen, dass die im Ganzraumfall vorgeführte Methode zum Beweis der globalen Fortsetzbarkeit der Lösung analog für beschränkte Gebiete mit bestimmten Randbedingungen durchgeführt werden kann.
Insbesondere werden für $J = (0,1)$ Randbedingungen der Form

$$q(t,0) = q(t,1) = 0 \qquad \text{für} \quad t \geq 0 \tag{0.8}$$

und

$$\theta(t,0) = \theta(t,1) = \bar{\theta} \qquad \text{für} \quad t \geq 0 \tag{0.9}$$

genannt. Dies motivierte die folgende Arbeit, in der wir die Beweise für diese beiden Randbedingungen vorführen werden. Dazu sei bemerkt, dass unter der Randbedingung (0.8) analog zu [5] vorgegangen wird. Im Fall der Randbedingung (0.9) treten bei diesem Versuch Komplikationen auf, so dass wir für den Beweis eine andere Methode anwenden. Dabei orientieren wir uns an [19], wo ähnliche Resultate für ein Thermoelastizitätsproblem mit *second sound* bewiesen werden.

Wir betrachten den Fall $J = (0, 1)$ und setzen dabei für die Koeffizienten ebenfalls (0.7) voraus.
In Abschnitt 2.2 werden *isolierte Ränder* untersucht. Diese werden durch die Randbedingung (0.8) beschrieben. Wie schon erwähnt, werden wir dort einen zu [5] analogen Beweis vorführen und für homogene Systeme, d.h. für $r \equiv 0$, entsprechende Ergebnisse erhalten.
Im inhomogenen Fall können wir nach gewissen Forderungen an die Funktion r die Existenz einer globalen Lösung zu einem System mit einer rechten Seite, die r approximiert, beweisen.
In Abschnitt 2.3 wird das System unter der Annahme, dass die Temperatur an den Rändern konstant gehalten wird, untersucht. Diese Randbedingung formulieren wir für eine feste Temperatur $\bar{\theta} > 0$ durch (0.9).
In diesem Fall können wir für homogene und inhomogene Systeme mit Anfangsdaten, die *in der Nähe* der *Gleichgewichtslösung* $(q, \theta) \equiv \left(0, \bar{\theta}\right)$ liegen, die globale Existenz einer klassischen Lösung beweisen. Dafür müssen auch hier gewisse Forderungen an die rechte Seite r gestellt werden. Falls r exponentiell abfällt, kann sogar gezeigt werden, dass der Zustand $\left(0, \bar{\theta}\right)$ *exponentiell stabil* ist.
Es ist zu bemerken, dass der Fall $J = (a, b)$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ durch Skalierung auf den Fall $J = (0, 1)$ reduziert werden kann.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:
Im ersten Kapitel werden verwendete Notationen eingeführt und einige Hilfsmittel definiert bzw. vorgestellt. Außerdem wird dort ein Existenzsatz für quasilineare symmetrisch-hyperbolische Systeme formuliert, der uns für beide Randbedingungen eine lokale Lösung unseres Systems liefern wird.
Im zweiten Kapitel wird das oben eingeführte Anfangsrandwertproblem untersucht, wobei sich Abschnitt 2.2 mit isolierten Rändern und Abschnitt 2.3 mit Rändern mit konstant gehaltener Temperatur beschäftigt. Der Beweisaufbau ist in beiden Fällen ähnlich:
Zuerst wird ein neues System eingeführt, dessen Lösungen, falls sie nahe bei Null liegen, Lösungen zu (0.5)-(0.6) liefern. Für dieses zeigen wir, dass es die Voraussetzungen des im ersten Kapitel vorgestellten lokalen Existenzsatzes erfüllt. Damit erhalten wir eine lokale Lösung, für die wir jeweils mit geeigneten Energieabschätzungen die Fortsetzbarkeit auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ zeigen werden. Diese globale Lösung liefert uns eine ebenfalls globale Lösung zu (0.5)-(0.6), deren Konvergenzverhalten wir schließlich untersuchen werden.
Der verwendete lokale Existenzsatz wird in [16], Appendix A, bewiesen. Diesen Beweis führen wir in Kapitel 3 ausführlich vor.

Kapitel 1

Vorbereitungen

1.1 Definitionen und Notationen

Sei $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und vom Ort $x \in \mathbb{R}^n$ abhängt. Dann schreiben wir $\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$ für die partielle Ableitung nach t bzw. $\partial_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ für die partielle Ableitung in Richtung der j-ten Komponente von x.
Ein $(n+1)$-Tupel $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ nennen wir *Multiindex*. Für einen solchen Multiindex α sei $D^\alpha \equiv \partial_t^{\alpha_0} \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ ein Differentialoperator der Ordnung $|\alpha| := \sum_{i=0}^n \alpha_i$.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann seien

$$
\begin{aligned}
C^m(\Omega) &= \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega) \quad \text{für alle} \quad 0 \le |\alpha| \le m\}\,, \\
C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega) \qquad \text{und} \\
C_0^\infty(\Omega) &= \{u \in C^\infty(\Omega) : \quad \mathit{supp}(u) \quad \text{ist kompakt in} \quad \Omega\}
\end{aligned}
$$

mit $\mathit{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$.
Außerdem seien

$$C_b^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : D^\alpha u \quad \text{ist beschränkt für alle} \quad 0 \le |\alpha| \le m\}$$

und

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{u \in C_b^m(\Omega) : D^\alpha u \quad \text{ist gleichmäßig stetig in } \Omega \text{ für} \quad 0 \le |\alpha| \le m\}\,.$$

In $C_b^m(\Omega)$ ist

$$\| \cdot \|_{C^m(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \cdot (x)|$$

eine Norm, die diesen Raum zu einem Banachraum macht.
$C^m(\bar{\Omega})$ ist bezüglich der Norm $\| \cdot \|_{C^m(\Omega)}$ ein abgeschlossener Unterraum von $C_b^m(\Omega)$.

Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichnen wir mit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \quad \text{für alle} \quad 0 \leq |\alpha| \leq m \quad \text{existiert} \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

die üblichen *Sobolevräume*. Hierbei stehe $D^\alpha u$ für die *schwache Ableitung*[1] von u. $W^{m,p}(\Omega)$ ist vollständig bezüglich der Norm

$$\|\cdot\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \cdot\|^p_{L^p(\Omega)} \quad \text{bzw.} \quad \|\cdot\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \cdot\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Die Vervollständigung der Mengen

$$\left\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{W^{m,2}(\Omega)} < \infty\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{u \in C_0^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{m,2}(\Omega)} < \infty\right\}$$

bezüglich der $W^{m,2}$-Norm nennen wir, wie gewohnt, $H^m(\Omega)$ bzw. $H_0^m(\Omega)$. Es gilt bekanntlich

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Mit diesen Definitionen, die hauptsächlich [1] entnommen sind, sei für $m \in \mathbb{N}$ und $T > 0$

$$X_m\left([0,T],\Omega\right) = \bigcap_{j=0}^m C^j\left([0,T], H^{m-j}(\Omega)\right).$$

Mit der Norm

$$|||\cdot|||^2_{m,T} := \sup_{0\leq t\leq T} |||\cdot(t)|||^2_m := \sup_{0\leq t\leq T} \sum_{j=0}^m \|\partial_t^j \cdot (t)\|^2_{H^{m-j}(\Omega)}$$

wird $X_m\left([0,T],\Omega\right)$ zu einem Banachraum und es gilt

$$X_m\left([0,T],\Omega\right) \subset H^m\left([0,T]\times\Omega\right) \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|^2_{H^m([0,T]\times\Omega)} = \int_0^T |||\cdot(t)|||^2_m \,\mathrm{d}t.$$

Für offene Intervalle (a,b) ist $X_m\left((a,b),\Omega\right)$ und $|||\cdot(t)|||^2_m$ für $t \in (a,b)$ analog definiert.

Ist eine Verwechslung unwahrscheinlich, so schreiben wir meistens $\|\cdot\|_{L^2}$ anstelle von $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|u\|_{C^m}$ anstelle von $\|u\|_{C^m(\Omega)}$ usw.

1.2 Verwendete Hilfsmittel

Wir weden hier einige Sätze und Ungleichungen aufführen, die in den späteren Beweisen häufig verwendet werden.

[1] siehe [1] 1.62

Satz 1.1 (Sobolevscher Einbettungssatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das die gewöhnliche Kegeleigenschaft[2] *besitzt. Dann gilt*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega), \qquad \text{falls} \quad mp > n \quad \text{oder} \qquad m = n \quad \text{und} \quad p = 1.$$

Falls Ω die starke lokale Lipschitzeigenschaft[3] *besitzt, gilt sogar*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega}), \qquad \text{falls} \quad mp > n \quad \text{oder} \qquad m = n \quad \text{und} \quad p = 1.$$

Hierbei bezeichne $X \hookrightarrow Y$ für zwei normierte Räume X und Y eine *stetige Einbettung*, d.h.

(i) $X \subset Y$ und

(ii) zum Identitätsoperator $Id : X \to Y$ mit $Id(x) = x$ gibt es ein $c > 0$ mit

$$\|Id(x)\|_Y \leq c\|x\|_X \qquad \text{für alle} \quad x \in X.$$

In [1] 4.12 wird eine umfangreichere Version von Satz 1.1 formuliert und bewiesen.

Lemma 1.2 (Erste Poincarésche Ungleichung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und in eine Richtung beschränkt. Dann gibt es ein allein von Ω abhängiges $c > 0$, so dass für alle $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq c \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

gilt.

Einen Beweis dieser Ungleichung findet man in [8].

Satz 1.3 (Lemma von Gronwall)
Es seien u, v und w in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $v \geq 0$ und w stetig differenzierbar in $[a, b]$. Falls

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t u(s)v(s) \, \mathrm{d}s \qquad \text{für alle} \quad t \in [a, b]$$

gilt, so gilt auch

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t e^{\int_\tau^t v(s) \, \mathrm{d}s} v(\tau)w(\tau) \, \mathrm{d}\tau \qquad \text{für alle} \quad t \in [a, b].$$

Falls w in $[a, b]$ zusätzlich nichtnegativ und monoton wachsend ist, gilt

$$u(t) \leq w(t)e^{\int_a^t v(s) \, \mathrm{d}s}.$$

[2] siehe [1] 4.6
[3] siehe [1] 4.9

Dieser Satz wird in [10] bewiesen.
Eine weitere nach Gronwall benannte Abschätzung liefert der folgende Satz.

Satz 1.4 (Gronwallsches Lemma)
Es seien $a > 0$, R und φ Funktionen mit $\varphi, R \in C([0,a], \mathbb{R})$ und φ differenzierbar in $(0,a)$. Weiter sei $\alpha > 0$ und es gelte für alle $t \in [0,a]$ die Ungleichung

$$\varphi'(t) \leq -\alpha\varphi(t) + R(t).$$

Dann gilt für alle $t \in [0,a]$

$$\varphi(t) \leq e^{-\alpha t}\varphi(0) + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} R(s)\,\mathrm{d}s.$$

Beweis: Sei $\psi(t) := \varphi(t)e^{\alpha t} - \int_0^t e^{\alpha s} R(s)\,\mathrm{d}s$ für $t \in [0,a]$.
Dann ist ψ differenzierbar mit

$$\psi'(t) = e^{\alpha t}\left(\varphi'(t) + \alpha\varphi(t) - R(t)\right) \leq 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in [0,a].$$

ψ ist in $[0,a]$ also monoton fallend, so dass

$$\varphi(0) = \psi(0) \geq \psi(t) = \varphi(t)e^{\alpha t} - \int_0^t e^{\alpha s} R(s)\,\mathrm{d}s$$

und damit

$$\varphi(t) \leq e^{-\alpha t}\varphi(0) + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} R(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für alle} \quad t \in [0,a]$$

gilt. □

1.3 Formulierung des lokalen Existenzsatzes

Wir werden hier einen lokalen Existenzsatz für quasilineare symmetrisch-hyperbolische Systeme in beschränkten Gebieten mit geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen vorstellen. Diesen Satz werden wir in Kapitel 2 anwenden und in Kapitel 3 beweisen. Zur Formulierung des Satzes werden zuerst einige Notationen und Begriffe eingeführt.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $T > 0$ und $A^j : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^{l \times l}$ matrixwertige Funktionen für $0 \leq j \leq n$.
Damit definieren wir für Funktionen $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ einen Differentialoperator L durch

$$L(t,x,u)u \equiv A^0(t,x,u)\partial_t u + A^j(t,x,u)\partial_j u + B(t,x,u)u \qquad \text{für} \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega$$

und betrachten für geeignete Funktionen $F : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ Systeme der Form

$$L(u)u = F \qquad \text{in} \quad [0,T] \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(0,\cdot) = f \qquad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.2}$$

$$Mu = 0 \qquad \text{in} \quad [0,T] \times \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Hierbei sei $M : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{(r\times l)}$ glatt, $r < l$ und $Rang(M(x)) = r$ für $x \in \partial\Omega$.

Sei ν die *äußere Einheitsnormale* auf $\partial\Omega$. Dann nennen wir die durch

$$A^\nu(t,x,u) := \sum_{j=1}^n \nu^j(x) A^j(t,x,u) \qquad \text{für} \quad (t,x,u) \in [0,T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^l$$

definierte Matrix *Randmatrix* zum Operator L.
Sei $\tilde{N} := \left\{(x,v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^l : M(x)v = 0\right\}$ und $\ker(M(x)) \subset \mathbb{R}^l$ der Nullraum von $M(x)$. Dann heißt die Randbedingung $Mu = 0$ *maximal nichtnegativ*, falls $A^\nu(t,x,u)$ für $(t,x,u) \in [0,T] \times \tilde{N}$ auf $\ker(M(x))$ positiv semidefinit ist und $\ker(M(x))$ bezüglich Mengeninklusion ein maximaler Unterraum mit dieser Eigenschaft ist.

Wir nehmen nun an, dass $u \in C^1([0,T] \times \bar{\Omega})$ eine Lösung zu (1.1)-(1.3) und A^0 invertierbar ist. Dann gilt zum Zeitpunkt $t = 0$ wegen $u(0,\cdot) = f$ in Ω

$$\partial_t u(0,\cdot) = (A^0(t,\cdot,f(\cdot)))^{-1} \left[F(0,\cdot) - A^j(0,\cdot,f(\cdot))\partial_j f(\cdot) - B(0,\cdot,f(\cdot))f(\cdot)\right].$$

Wegen $M(\cdot)u(t,\cdot) = 0$ in $[0,T] \times \partial\Omega$ ist auch

$$0 = \partial_t \left[M(\cdot)u(t,\cdot)\right] = M(\cdot)\partial_t u(t,\cdot) \qquad \text{in} \quad [0,T] \times \partial\Omega$$

und es muss insbesondere $M(\cdot)\partial_t u(0,\cdot) = 0$ in $\partial\Omega$ gelten.
Um von der Lösung u die gewünschte Regularität erwarten zu können, muss das System daher einer Bedingung der Form

$$M(\cdot) \cdot \left\{(A^0(t,\cdot,f(\cdot)))^{-1} \left[F(0,\cdot) - A^j(0,\cdot,f(\cdot))\partial_j f(\cdot) - B(0,\cdot,f(\cdot))f(\cdot)\right]\right\} = 0$$

in $\partial\Omega$ genügen.
Mit induktiver Argumentation erhält man für $p \geq 2$ analoge Bedingungen an $\partial_t^p u(0,\cdot)$, die als *Kompatibilitätsbedingungen* vom System gefordert werden müssen, damit die Existenz einer Lösung mit entsprechender Regularität möglich ist.

Da aber die Existenz einer Lösung mit ausreichender Regularität zuerst gezeigt werden muss, schreiben wir $'\partial_t^p u(0,\cdot)'$ anstelle von $\partial_t^p u(0,\cdot)$. Formal erhält man die Funktion $'\partial_t^p u(0,\cdot)'$, indem man das System $p-1$ mal nach t ableitet, nach $\partial_t^p u$ auflöst und die Gleichung an der Stelle $t = 0$ auswertet.
Damit können wir die Kompatibilitätsbedingungen an das System durch $M'\partial_t^p u(0,\cdot)' = 0$ in $\partial\Omega$ ausdrücken.

Vom Gebiet Ω fordern wir, dass es für alle $r \in \mathbb{N}$ die *gleichmäßige C^r-Regularitätseigenschaft* besitzt, die nach 4.10 in [1] folgendermaßen definiert ist.

Definition 1.5
Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt die gleichmäßige C^r-Regularitätseigenschaft*, falls es eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_j\}$ von $\partial\Omega$ und eine dazugehörende Folge $\{\Phi_j\}$ r-glatter*[4] *Transformationen mit $\Phi_j(U_j) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\} =: B$ und inversen Funktionen $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$ gibt, so dass gilt:*

(i) *Es gibt ein $R < \infty$, so dass der Durchschnitt von jeweils $R+1$ Mengen U_j leer ist.*

(ii) *Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$ $\Omega_\delta \subset \bigcup_{j=1}^\infty \Psi_j\left(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\}\right)$ gilt.*

(iii) *$\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$ für alle j.*

(iv) *Es seien $(\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,n})$ und $(\psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,n})$ die Komponenten von Φ_j und Ψ_j. Dann gibt es eine Konstante $M < \infty$ so, dass für alle α mit $0 \le |\alpha| \le r$, alle $1 \le i \le n$ und alle j*

$$\begin{aligned} |D^\alpha \phi_{j,i}(x)| &\le M, && \text{für} \quad x \in U_j \\ |D^\alpha \psi_{j,i}(y)| &\le M, && \text{für} \quad y \in B \end{aligned}$$

gilt.

Mit diesen Bezeichnungen formulieren wir nun einen lokalen Existenzsatz.

[4]Nach [1] Seite 77 heißt eine Transformation Φ r-glatt, wenn ihre Komponentenfunktionen $\phi_1, \dots, \phi_n$ in $C^r(\bar{\Omega})$ liegen.

Satz 1.6
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ und es gelte:

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ist ein offenes, beschränktes Gebiet, das für alle $r \in \mathbb{N}$ die gleichmäßige C^r-Regularitätseigenschaft besitzt.*

(ii) $F \in H^m([0,T] \times \Omega)$ *und* $f \in H^m(\Omega)$.

(iii) $M(x) \in C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$.

(iv) *Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $T_0 \in (0,T]$, so dass $A^0, A^j, B \in C^m([0,T_0] \times N_0)$ gilt, wobei $N_0 := \left\{(x,v) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^l : |v - f(x)| \leq \varepsilon_0\right\}$ sei.*

(v) A^0 *und die* A^j *sind symmetrisch in* $[0,T_0] \times N_0$.

(vi) *Es gibt ein $c_{A^0} > 0$, so dass für alle $h \in \mathbb{R}^l$ gilt:*

$$h^T A^0 h \geq c_{A^0} |h|^2 \qquad \text{in} \quad [0,T_0] \times N_0.$$

(vii) *Für alle $(t,x,u) \in [0,T_0] \times N_0 \cap \tilde{N}$ ist die Randmatrix $A^\nu(t,x,u)$ regulär und es gibt ein $c_{A^\nu} > 0$, so dass gilt:*

$$\|(A^\nu)^{-1}\|_{op} \leq c_{A^\nu} \qquad \text{in} \quad [0,T_0] \times N_0 \cap \tilde{N}.$$

Hierbei stehe $\|A\|_{op} := \sup_{v \in R^l} \frac{|Av|}{|v|}$ für die übliche Operatornorm.

(viii) *Die Randbedingung $Mu = 0$ ist maximal nichtnegativ.*

(ix) $M' \partial_t^i u(0,\cdot)' = 0$ *in* $\partial\Omega$ *für* $0 \leq i \leq m-1$.

Dann gibt es ein $T_1 \in (0,T_0]$ so, dass in $[0,T_1]$ eine eindeutige Lösung $u \in X_m([0,T_1],\Omega)$ zu (1.1)-(1.3) existiert.

Zu bemerken ist, dass die Länge T_1 des Existenzintervalls nur von Ω, M, m, ε_0, T_0, den Koeffizientenfunktionen A^0, A^j, B, der rechten Seite F und der Norm $\|f\|_{H^m(\Omega)}$ der Anfangsfunktion f abhängt.

Kapitel 2

Nichtlineare Wärmeleitung mit „second sound“ in beschränkten Gebieten

2.1 Vorüberlegungen

In diesem Kapitel ist es unser Ziel, die Existenz einer stetig differenzierbaren globalen Lösung (q,θ) zu dem System

$$\tau(\theta)q_t + q + \chi(\theta)\theta_x = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{2.1}$$

$$q_x + c_0(\theta)\theta_t + a'(\theta)q^2\theta_t + 2a(\theta)qq_t = r \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J \tag{2.2}$$

mit der Anfangsbedingung

$$q(0,x) = q_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x) \qquad \text{für} \quad x \in J \tag{2.3}$$

und passenden Randbedingungen zu beweisen. Hierbei gelte für die Koeffizientenfunktionen

$$\tau, \chi, c_0 \in C^2(\mathbb{R}^+), \quad a \in C^3(\mathbb{R}^+) \qquad \text{und} \tag{2.4}$$

$$\tau, \chi, c_0 > 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^+ \tag{2.5}$$

und die rechte Seite r liege in $H^2\left(\mathbb{R}_0^+ \times \Omega\right)$.
Wir werden das Problem für zwei verschiedene Randbedingungen betrachten.
Zuerst gehen wir davon aus, dass J an beiden Rändern isoliert ist. Dies beschreiben wir durch die Bedingung

$$q(t,0) = q(t,1) = 0 \qquad \text{für} \quad t \geq 0. \tag{2.6}$$

Um einen sinnvollen Existenzsatz formulieren zu können, untersuchen wir, wie in [5], Seite 272/273, vorgeführt, welche Forderungen an die Anfangsdaten (q_0, θ_0) gestellt werden müssen, damit die mögliche Lösung überhaupt stetig differenzierbar sein kann.
Wir nehmen dazu an, dass $(q, \theta) \in C^1([0,T] \times J)$, für ein $T > 0$, eine Lösung zu (2.1)-(2.3) und (2.6) ist. Aufgrund der Anfangs- und Randbedingungen gilt für diese

$$q_0(0) = q(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad q_0(1) = q(0,1) = 0.$$

Ableiten von (2.6) impliziert zudem

$$q_t(t,0) = q_t(t,1) = 0.$$

Aus Gleichung (2.1) erhält man damit

$$\chi(\theta(0,0))\theta_x(0,0) = \chi(\theta(0,1))\theta_x(0,1) = 0.$$

Da χ stets positiv ist, folgt daraus

$$\theta_0'(0) = \theta_x(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad \theta_0'(1) = \theta_x(0,1) = 0.$$

Im Falle isolierter Ränder setzten wir für die Anfangsdaten deshalb

$$q_0(0) = q_0(1) = \theta_0'(0) = \theta_0'(1) = 0$$

als Kompatibilitätsbedingungen voraus.
Die zweite Randbedingung beschreibt Ränder mit konstant gehaltener Temperatur $\bar{\theta} > 0$ durch

$$\theta(t,0) = \theta(t,1) = \bar{\theta} \qquad \text{für} \quad t \geq 0. \tag{2.7}$$

Um auch hier die notwendigen Kompatibilitätsbedingungen herauszufinden sei $(q, \theta) \in C^1([0,T] \times J)$ nun Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (2.1)-(2.3) und (2.7). Analog zu oben ergeben sich die Forderungen

$$\theta_0(0) = \theta_0(1) = \bar{\theta} \tag{2.8}$$

und

$$\theta_t(t,0) = \theta_t(t,1) = 0. \tag{2.9}$$

Wir lösen (2.1) nach q_t auf, setzen das Ergebnis in (2.2) ein und erhalten

$$q_x + c_0(\theta)\theta_t + a'(\theta)q^2\theta_t - \frac{2a(\theta)}{\tau(\theta)} q\left[q + \chi(\theta)\theta_x\right] = r. \tag{2.10}$$

Unter Berücksichtigung von (2.9) erhalten wir aus (2.10) zur Zeit $t = 0$ die Bedingung

$$\begin{aligned} & q_0'(0) - \frac{2a(\bar{\theta})}{\tau(\bar{\theta})} q_0(0)\left[q_0(0) + \chi(\bar{\theta})\theta_0'(0)\right] - r(0,0) \\ = \; & q_0'(1) - \frac{2a(\bar{\theta})}{\tau(\bar{\theta})} q_0(1)\left[q_0(1) + \chi(\bar{\theta})\theta_0'(1)\right] - r(0,1) = 0, \end{aligned}$$

die wir daher im Fall der Randbedingung (2.7) zusammen mit (2.8) als Kompatibilitätsbedingung an die Anfangsdaten voraussetzen.

Zu jedem $\bar{\theta} > 0$ gibt es eine Umgebung $U(\bar{\theta}) \subset \mathbb{R}^2$ von $\left(0, \bar{\theta}\right)$, in der aufgrund der Stetigkeit der Koeffizientenfunktionen die Summe $c_0 + a'q^2$ positiv ist. (2.10) darf deshalb in $U(\bar{\theta})$ durch $c_0 + a'q^2$ geteilt werden.
Damit und mit $u \equiv (q, \theta)$ können (2.1) und (2.2) in $U(\bar{\theta})$ zu

$$u_t + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\chi}{\tau} \\ \frac{1}{c_0 + a'q^2} & -\frac{2a\chi q}{\tau c_0 + a'\tau q^2} \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 \\ -\frac{2aq}{\tau c_0 + a'\tau q^2} & 0 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r}{c_0 + a'q^2} \end{pmatrix}$$

umgeschrieben werden. Für die Eigenwerte der ersten Matrix gilt

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a\chi q}{\tau c_0 + a'\tau q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a\chi q}{\tau c_0 + a'\tau q^2}\right)^2 + \frac{\chi}{\tau c_0 + a'\tau q^2}}.$$

Man erkennt, dass die Diskriminante in $U(\bar{\theta})$ positiv ist, also $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Somit ist das System in $U(\bar{\theta})$ strikt hyperbolisch.
Für quasilineare symmetrisch-hyperbolische Systeme liefert Satz 1.6 zu geeigneten Randbedingungen eine lokale Lösung. Es besteht also die Hoffnung, dass zu Anfangsdaten in Umgebungen von Paaren der Form $(0, \bar{\theta})$ mit $\bar{\theta} > 0$ zumindest eine lokale Lösung existiert.

2.2 Isolierte Ränder

Homogener Fall: Für homogene Systeme, also $r \equiv 0$, beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 2.1
Es gelte (2.4),(2.5), $J = (0,1)$ und $r \equiv 0$.
Dann gibt es zu jedem $\bar{\theta} > 0$ ein $\delta > 0$, so dass gilt:
Falls die Anfangsdaten (q_0, θ_0) die Bedingungen

$$q_0, \theta_0 \in H^2(J),$$

$$q_0(0) = q_0(1) = \theta_0'(0) = \theta_0'(1) = 0$$

und

$$\|q_0\|^2_{H^2(J)} + \left\|\theta_0 - \bar{\theta}\right\|^2_{H^2(J)} \leq \delta^2$$

erfüllen, besitzt das Anfangsrandwertproblem (2.1)-(2.3) und (2.6) eine eindeutige Lösung (q, θ) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $q, \theta \in X_2(\mathbb{R}_0^+, J)$

(ii) $\theta(t,x) > 0$ *für alle* $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times J$

(iii) *Es gibt genau ein* $\bar{\theta}_* > 0$ *mit*

$$e_0\left(\bar{\theta}_*\right) = \int_0^1 \left\{e_0\left(\theta_0\right) + a\left(\theta_0\right) q_0^2\right\}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Gegen dieses $\bar{\theta}_*$ *konvergiert* $\theta(t,\cdot)$ *für* $t \to \infty$ *gleichmäßig in* J.

(iv) *Für* $t \to \infty$ *konvergiert* $q(t,\cdot)$ *in* J *gleichmäßig gegen* 0.

(v) *Für* $t \to \infty$ *konvergieren* $|||q(t,\cdot)|||_1$, $\|\theta_x(t,\cdot)\|_{L^2}$ *und* $\|\theta_t(t,\cdot)\|_{L^2}$ *gegen* 0.

Inhomogener Fall: Für inhomogene Systeme wird hier, im Falle einer geeigneten rechten Seite r, lediglich die Existenz einer Lösung zum *angenäherten* System

$$\tau(\theta)q_t + q + \chi(\theta)\theta_x = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{2.11}$$

$$q_x + c_0(\theta)\theta_t + a'(\theta)q^2\theta_t + 2a(\theta)qq_t = r \cdot \frac{c_0(\theta)}{c_0(\bar{\theta})} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J \tag{2.12}$$

mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen bewiesen. Ob dies eine *gute* Näherung des ursprünglichen Systems ist und in wie weit der Fehler *klein* gehalten werden kann, wird im folgenden Abschnitt angesprochen.

Satz 2.2
Es gelte (2.4),(2.5), $J=(0,1)$ und es sei $r \in H^2\left(\mathbb{R}_0^+ \times J\right)$.
Dann findet man zu jedem $\bar{\theta}>0$ ein $\delta>0$ und zwei weitere Konstanten $\delta_1, \delta_2>0$, so dass gilt:
Falls die Anfangsdaten (q_0, θ_0) die Bedingungen

$$q_0, \theta_0 \in H^2(J),$$

$$q_0(0)=q_0(1)=\theta_0'(0)=\theta_0'(1)=0 \tag{2.13}$$

und

$$\|q_0\|_{H^2(J)}^2+\left\|\theta_0-\bar{\theta}\right\|_{H^2(J)}^2+|||r(0)|||_1^2 \leq \delta^2$$

erfüllen und für die rechte Seite r

$$\sup_{t \geq 0}|||r(t)|||_1^2 \leq \delta_1 \qquad \text{und} \tag{2.14}$$

$$\int_{\mathbb{R}^+}\|r(t)\|_{L^2(J)}+\|r_t(t)\|_{L^2(J)}+\|r_{tt}(t)\|_{L^2(J)} \,\mathrm{d}t \leq \delta_2. \tag{2.15}$$

gilt, besitzt das Anfangsrandwertproblem (2.11), (2.12), (2.3) und (2.6) eine eindeutige Lösung (q, θ) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $q, \theta \in X_2(\mathbb{R}_0^+, J)$

(ii) $\theta(t, x)>0$ *für alle* $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times J$

(iii) *Falls* $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^1 r(s, x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s=0$ *gilt, so gibt es genau ein* $\bar{\theta}_*>0$ *mit*

$$e_0\left(\bar{\theta}_*\right)=\int_0^1\left\{e_0\left(\theta_0\right)+a\left(\theta_0\right) q_0^2\right\}(x) \,\mathrm{d}x.$$

In diesem Fall konvergiert $\theta(t, \cdot)$ für $t \rightarrow \infty$ gleichmäßig in J gegen $\bar{\theta}_*$.

(iv) *Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $q(t, \cdot)$ in J gleichmäßig gegen 0.*

(v) *Für $t \rightarrow \infty$ konvergieren $|||q(t, \cdot)|||_1$, $\|\theta_x(t, \cdot)\|_{L^2}$ und $\|\theta_t(t, \cdot)\|_{L^2}$ gegen 0.*

Der Satz zum inhomogenen Fall wird in den vier folgenden Abschnitten, 2.2.1-2.2.4, bewiesen. Dabei gehen wir analog zu [5] vor.
Indem man $r \equiv 0$ setzt, ergeben sich daraus direkt die Aussagen für den homogenen Fall.

2.2.1 Transformation des Systems

Sei $\bar{\theta} > 0$.
Wie in [5] vorgeführt, konstruieren wir dazu ein neues Anfangsrandwertproblem, das für Anfangsdaten (q_0, θ_0), die *nahe* bei $\big(0, \bar{\theta}\big)$ liegen, zu (2.11),(2.12),(2.3) und (2.6) äquivalent ist. Für dieses neue System können wir zeigen, dass die Voraussetzungen des lokalen Existenzsatzes, Satz 1.6, erfüllt sind und werden so eine eindeutige lokale Lösung mit gewünschter Regularität erhalten.
Außerdem werden die neuen Koeffizientenfunktionen einfacher abzuschätzen sein, was die Beweise zur globalen Existenz der Lösung und deren Abklingverhalten erleichtern wird.
Dazu dividieren wir (2.10) durch $c_0(\theta)$ und (2.1) durch $\chi(\theta)c_0(\theta)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\tau(\theta)}{\chi(\theta)c_0(\theta)}}_{\equiv\tilde{A}(\theta)} q_t + \underbrace{\frac{1}{\chi(\theta)c_0(\theta)}}_{\equiv\tilde{B}(\theta)} q + \underbrace{\frac{1}{c_0(\theta)}}_{\equiv\tilde{C}(\theta)} \theta_x &= 0 \\
\underbrace{\frac{1}{c_0(\theta)}}_{\equiv\tilde{C}(\theta)} q_x + \theta_t + \underbrace{\left(\frac{a'(\theta)q^2}{c_0(\theta)}\right)}_{\equiv\tilde{D}(q,\theta)} \theta_t + \underbrace{\frac{-2a(\theta)\chi(\theta)}{\tau(\theta)c_0(\theta)}}_{\equiv\tilde{E}(\theta)} q\theta_x + \underbrace{\frac{-2a(\theta)}{\tau(\theta)c_0(\theta)}}_{\equiv\tilde{F}(\theta)} q^2 &= \frac{r}{c_0(\theta)}.
\end{aligned}$$

Wegen der Regularität der ursprünglichen Koeffizientenfunktionen (2.4), liegen die Funktionen $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{E}$ und $\tilde{F}$ in $C^2(\mathbb{R}^+)$ und $\tilde{D}$ in $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.
Außerdem sind wegen (2.5) $\tilde{A}, \tilde{B}$ und $\tilde{C}$ positiv für alle $\theta > 0$, also insbesondere auch in einer Umgebung von $\bar{\theta}$, und $\tilde{D} = 0$ in $(0, \bar{\theta})$. Deshalb gilt die folgende Aussage.

Satz 2.3
Es gibt ein $\bar{\varepsilon} \in (0, \bar{\theta})$ und Funktionen $A, B, C, E, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit:

(i) $A, B, C, E, F \in C_b^2(\mathbb{R})$

(ii) $A(\psi) = \tilde{A}(\psi + \bar{\theta}), B(\psi) = \tilde{B}(\psi + \bar{\theta}), C(\psi) = \tilde{C}(\psi + \bar{\theta}), E(\psi) = \tilde{E}(\psi + \bar{\theta})$ *und* $F(\psi) = \tilde{F}(\psi + \bar{\theta})$ *für* $\psi \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$

(iii) $D \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$

(iv) $D(\eta, \psi) = \tilde{D}(\eta, \psi + \bar{\theta})$ *für* $\eta, \psi \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$

(v) *Es gibt* $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C} \in \mathbb{R}$ *mit* $A(\psi) \geq \underline{A} > 0, B(\psi) \geq \underline{B} > 0$ *und* $C(\psi) \geq \underline{C} > 0$ *für* $\psi \in \mathbb{R}$

(vi) $|D(\eta, \psi)| \leq \frac{1}{2}$ *für* $(\eta, \psi) \in \mathbb{R}^2$

(vii) *Es gibt ein* $K \in \mathbb{R}$ *mit* $|D(\eta, \psi)| \leq K\eta^2$ *für* $(\eta, \psi) \in \mathbb{R}^2$

Mit solchen Funktionen A bis F als neue Koeffizientenfunktionen, der Verschiebung

$$\varphi \equiv \theta - \bar{\theta}$$

und

$$f(t,x) \equiv \frac{r(t,x)}{c_0(\bar{\theta})} \qquad \text{für} \quad (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times J$$

betrachten wir das folgende neue Anfangsrandwertproblem.

$$A(\varphi)q_t + B(\varphi)q + C(\varphi)\varphi_x = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{2.16}$$

$$C(\varphi)q_x + \varphi_t + D(q,\varphi)\varphi_t + E(\varphi)q\varphi_x + F(\varphi)q^2 = f \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{2.17}$$

$$q(t,0) = q(t,1) = 0 \qquad \text{für} \quad t \geq 0, \tag{2.18}$$

$$q(0,x) = q_0(x), \quad \varphi(0,x) = \varphi_0(x) = \theta_0(x) - \bar{\theta} \qquad \text{für} \quad x \in J. \tag{2.19}$$

Homogener Fall: Falls das ursprüngliche System homogen ist, ist auch das neue System homogen und nach Konstruktion gilt die folgende Bemerkung.

Bemerkung 2.4
Ist (q,φ) eine Lösung von (2.16)-(2.19) mit $\|q\|_{C^0} \leq \bar{\varepsilon}$ und $\|\varphi\|_{C^0} \leq \bar{\varepsilon}$, so ist dies äquivalent dazu, dass $(q,\theta) = (q,\varphi+\bar{\theta})$ eine Lösung von (2.1)-(2.3) und (2.6) mit $\|q\|_{C^0} < \bar{\varepsilon}$ und $\|\theta-\bar{\theta}\|_{C^0} < \bar{\varepsilon}$ ist. Außerdem gilt $q_0,\varphi_0 \in H^2(J)$ genau dann, wenn $q_0,\theta_0 \in H^2(J)$ gilt.

Wir werden zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Lösung von (2.16)-(2.19) zu Anfangswerten q_0, φ_0 mit $\|q_0\|^2_{H^2(J)} + \|\varphi_0\|^2_{H^2(J)} + |||f(0)|||_1^2 \leq \delta^2$

$$|q(t,x)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |\varphi(t,x)| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times J \tag{2.20}$$

gilt. Insbesondere gilt also für hinreichend klein gewählte Anfangsdaten

$$\|q\|_{C^0} < \bar{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \|\varphi\|_{C^0} < \bar{\varepsilon}. \tag{2.21}$$

Im homogenen Fall macht es deshalb Sinn, das neue System zu betrachten und die bewiesenen Aussagen auf das ursprüngliche System zu übertragen.

Inhomogener Fall: Im inhomogen Fall liefert eine Lösung zu (2.16)-(2.19), für die (2.21) gilt, eine Lösung zu den Gleichungen (2.11) und (2.12) mit den passenden Anfangs- und Randbedingungen.
Ob $r \cdot \frac{c_0(\theta)}{c_0(\bar{\theta})}$ eine gute *Näherung* für r ist, hängt von der Funktion c_0 und der Wahl von δ ab. Aufgrund der Stetigkeit von c_0 gibt es nämlich zu jedem $\rho > 0$ ein $\varepsilon(\rho) > 0$, so

dass, für $\|\theta - \bar{\theta}\|_{C^0} \le \varepsilon(\rho)$, $\|c_0(\theta) - c_0(\bar{\theta})\|_{C^0} \le \rho$ ist. Wird δ nun so gewählt, dass (2.20) für $\varepsilon(\rho)$ gilt, folgt damit

$$\frac{r \cdot \frac{c_0(\theta)}{c_0(\bar{\theta})} - r}{r} \le \frac{c_0(\bar{\theta}) + \rho}{c_0(\bar{\theta})} - 1 = \frac{\rho}{c_0(\bar{\theta})}.$$

Der *relative Fehler* kann also durch die nach Wahl von ρ und damit durch die Wahl von δ klein gehalten werden. Dies bedeutet aber, dass je geringer der Näherungsfehler sein soll, desto stärker müssen die Forderungen an die Anfangsdaten sein.

2.2.2 Lokale Lösung

Behauptung 2.5
Es gibt ein $T > 0$, so dass die Anfangsrandwertaufgabe (2.16)-(2.19) in $[0, T]$ eine eindeutige Lösung $(q, \varphi) \in X^2([0, T], J)$ besitzt.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass das System (2.16)-(2.19) die Voraussetzungen von Satz 1.6 erfüllt. Sei dazu $\Omega = (0, 1)$, $u = (q, \varphi)$ und entsprechend $u_0 = u(0, \cdot) = (q_0, \varphi_0)$. Außerdem seien

$$A^0(u) = \begin{pmatrix} A(u) & 0 \\ 0 & (1+D)(u) \end{pmatrix}, \quad A^1(u) = \begin{pmatrix} 0 & C(u) \\ C(u) & E(u)q \end{pmatrix},$$
$$B(u) = \begin{pmatrix} B(u) & 0 \\ F(u)q & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann kann (2.16)-(2.19) als

$$A^0(u)\partial_t u + A^1(u)\partial_x u + Bu = F \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times \Omega, \tag{2.22}$$
$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für} \quad x \in \Omega, \tag{2.23}$$
$$Mu(t, x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{und} \quad t \ge 0 \tag{2.24}$$

geschrieben werden.
Mit $n = 1$ und $m = 2$ erfüllt dieses System offensichtlich die Voraussetzungen (i)-(v) des Existenzsatzes. Um (vi) zu zeigen, sei $h = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wegen $A \ge \underline{A} > 0$ und $|1 + D| \ge \frac{1}{2}$ gilt

$$h^T A^0 h = Ah_1^2 + (1 + D)h_2^2 \ge c_{A^0}|h|^2$$

für $c_{A^0} := \min\left\{\underline{A}, \frac{1}{2}\right\}$.

Um (vii) zu zeigen, betrachten wir die zu unserem System gehörenden Randmatrizen

$$A^\nu(t,0,u) = -\begin{pmatrix} 0 & C(u) \\ C(u) & E(u)q \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A^\nu(t,1,u) = \begin{pmatrix} 0 & C(u) \\ C(u) & E(u)q \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det\left(A^\nu(t,x,u)\right) = \pm C^2(u) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega$ und somit ist A^ν auf $\partial\Omega$ invertierbar. Für die Inverse $\left(A^\nu(t,x,u)\right)^{-1} = \pm \begin{pmatrix} -\frac{E(u)q}{C^2(u)} & \frac{1}{C(u)} \\ \frac{1}{C(u)} & 0 \end{pmatrix}$ und beliebiges $h = (h_1,h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} |(A^\nu)^{-1}h|^2 &= \left| \begin{pmatrix} -\frac{Eq}{C^2}h_1 + \frac{1}{C}h_2 \\ \frac{1}{C}h_1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{C^2}h_2^2 + \left|\frac{Eq}{C^3}\right|(h_1^2+h_2^2) + \left(\frac{Eq}{C^2}\right)^2 h_1^2 + \frac{1}{C^2}h_1^2 \\ &\leq \left(\left|\frac{Eq}{C^3}\right| + \left(\frac{Eq}{C^2}\right)^2 + \frac{1}{C^2} \right) |h|^2. \end{aligned}$$

Mit $c_{A^\nu} := \sqrt{\left|\frac{Eq}{C^3}\right| + \left(\frac{Eq}{C^2}\right)^2 + \frac{1}{C^2}}$ ist also $\|(A^\nu)^{-1}\|_{op} \leq c_{A^\nu}$ und damit (vii) gezeigt.
Für $h = (h_1,h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ist $Mh = 0$ äquivalent zu $h_1 = 0$. Es ist also $\ker(M) = \{(0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Für $h \in \ker(M)$ ist deshalb und wegen der Randbedingung $q = 0$ in $\{0,1\}$ $h^T A^\nu(t,x,u)h = \pm\left(2C(u)h_1h_2 + E(u)qh_2^2\right) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $u \in \ker(M)$. Damit ist gezeigt, dass $A^\nu(t,x,u)$ positiv semidefinit auf $\ker(M)$ ist.
Außerdem kann es keinen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $\ker(M) \subsetneq U$ und A^ν positiv semidefinit auf U geben. Für diesen würde nämlich $\dim(U) > \dim(\ker(M)) = 1$, also $U = \mathbb{R}^2$, gelten. A^ν ist aber offensichtlich nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ positiv semidefinit. Somit ist auch (viii) gezeigt.
Es ist

$$\begin{aligned} M'\partial_t^0 u(0,\cdot)' &= Mu_0 = q_0 \qquad \text{und} \\ M'\partial_t^1 u(0,\cdot)' &= M\left(A^0(0,\cdot)\right)^{-1}\left(F(0,\cdot) - B(0,\cdot)u_0 - A^1(0,\cdot)\partial_x u_0\right) \\ &= -\frac{B}{A}(0,\cdot)q_0 + \frac{C}{A}(0,\cdot)\varphi_0'. \end{aligned}$$

Damit und mit den Kompatibilitätsbedingungen (2.13) gilt $M'\partial_t^0 u(0,x)' = 0$ und $M'\partial_t^1 u(0,x)' = 0$ für $x \in \{0,1\}$.
Satz 1.6 ist also auf unser Problem anwendbar und liefert uns ein $T > 0$ und dazu eine eindeutige Lösung $u = (q,\varphi) \in X_2([0,T],J)$ zu (2.16)-(2.19).

$\square$

2.2.3 Globale Existenz

Wir betrachten das System

$$Aq_t + Bq + C\varphi_x = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{2.25}$$

$$Cq_x + \varphi_t + D\varphi_t + Eq\varphi_x + Fq^2 = f \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{2.26}$$

mit der Randbedingung

$$q(t,0) = q(t,1) = 0 \qquad \text{für} \quad t \geq 0 \tag{2.27}$$

und den Anfangswerten

$$q(0,x) = q_0(x) \quad \text{und} \quad \varphi(0,x) = \varphi_0(x) \qquad \text{für} \quad x \in J. \tag{2.28}$$

Die Koeffizientenfunktionen seien wie in Satz 2.3 definiert, wobei wir aber abkürzend A anstelle von $A(\varphi)$, D anstelle von $D(q,\varphi)$ usw. schreiben. Die rechte Seite f sei ebenfalls wie im vorherigen Abschnitt definiert und hängt somit nur vom Ort und der Zeit ab.
Es wird hier bewiesen, dass sich die, nach Satz 1.6 existierende, lokale Lösung u zu (2.25)-(2.28) zu einer globalen Lösung fortsetzen läßt[1].
Dazu sei die Lösung u schon auf ein maximales Existenzintervall $[0, T_0)$ fortgesetzt und liege somit in $X_2\left([0, T_0), J\right)$.
Wir werden zeigen, dass es ein $c \geq 0$ gibt mit $\|u(t)\|_{H^2} \leq c$ für alle $t \in [0, T_0)$. Nach Satz 1.6 gibt es dazu ein $T_* = T_*(c) > 0$ so, dass die Lösung u für alle $t \in [0, T_0)$ mindestens auf das Intervall $[0, t + T_*]$ fortgesetzt werden kann. Daraus folgt direkt die globale Existenz der Lösung.
Würde u nämlich nicht global existieren, so wäre $T_0 < \infty$. Für $t_* := T_0 - \frac{1}{2}T_*$ würde die Beschränktheit von u aber die Existenz der Lösung in $[0, T_0 + \frac{1}{2}T_*]$ implizieren, was ein Widerspruch zur Maximalität von T_0 wäre.
Sei

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) \quad := \quad & \sup_{s\in[0,t]} \left(\int_0^1 \left\{ q^2 + q_x^2 + q_t^2 + q_{xx}^2 + q_{tt}^2 + q_{xt}^2 \right\}(s,x)\,\mathrm{d}x \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left\{ \varphi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_t^2 + \varphi_{xx}^2 + \varphi_{tt}^2 + \varphi_{xt}^2 \right\}(s,x)\,\mathrm{d}x \right) \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left\{ q^2 + q_x^2 + q_t^2 + q_{xx}^2 + q_{tt}^2 + q_{xt}^2 \right\}(s,x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left\{ \varphi_x^2 + \varphi_t^2 + \varphi_{xx}^2 + \varphi_{tt}^2 + \varphi_{xt}^2 \right\}(s,x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \qquad \text{für} \quad t \in [0, T_0).
\end{aligned}$$

[1] Wir orientieren uns dabei an [5].

Aus der Beschränktheit von $\mathcal{E}$ in $[0,T_0)$ folgt nach Definition direkt die Beschränktheit von $\|u(\cdot)\|_{H^2}^2$ in $[0,T_0)$ und damit die globale Existenz der Lösung.
Unser erstes Ziel ist es deshalb eine obere Schranke für $\mathcal{E}$ zu finden. Dies ist der Grund dafür, dass $\mathcal{E}(t)$ den Summanden $\int_0^t\int_0^1 \varphi^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$ nicht enthält, da für diesen keine zeitunabhängige Schranke zu erwarten ist.
Es seien außerdem

$$R_1(t) := |||f(t)|||_1^2,$$

$$R_2(t) := \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(J)} + \|f_t(s)\|_{L^2(J)} + \|f_{tt}(s)\|_{L^2(J)}\,\mathrm{d}s$$

und, wie gewohnt,

$$\|u_0\|_{H^2}^2 = \int_0^1 \left\{q^2 + q_x^2 + q_{xx}^2 + \varphi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_{xx}^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x.$$

Aus den beiden folgenden Lemmata wird die Beschränktheit von $\mathcal{E}$ folgen.

Lemma 2.6
Für alle $\bar{\mathcal{E}} > 0$ gibt es ein $\delta_0 > 0$, so dass, falls $\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_2^2 \leq \delta_0^2$ ist,

$$\mathcal{E}(0) < \bar{\mathcal{E}}$$

gilt.

Lemma 2.7
Es gibt ein von u unabhängiges $\bar{\Gamma} > 0$, so dass, falls $\|u_0\|_{H^2}^2 \leq 1$ ist, für alle $t \in [0,T_0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) \quad &\leq \quad \bar{\Gamma}\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \bar{\Gamma}\cdot R_1(t) + \bar{\Gamma}\sqrt{\mathcal{E}(t)}\cdot R_2(t)\\ &\quad\quad +\bar{\Gamma}\left(\sqrt{\mathcal{E}(t)} + \mathcal{E}^2(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t)\end{aligned} \tag{2.29}$$

gilt.

Um die Beweise zu Lemma 2.6 und Lemma 2.7 übersichtlicher darzustellen, stehe Γ stets für unterschiedliche, aber allein von den Koeffizientenfunktionen und dem Intervall J abhängige, Konstanten und es seien

$$v(t) := \sup_{(s,x)\in[0,t]\times J}\left\{|q| + |q_x| + |q_t| + |\varphi| + |\varphi_x| + |\varphi_t|\right\}(s,x) \qquad \text{für} \quad t \in [0,T_0)$$

und

$$\tilde{v}(t) := \sup_{(s,x)\in[0,t]\times J}\left\{|q| + |q_x| + |\varphi| + |\varphi_x|\right\}(s,x) \qquad \text{für} \quad t \in [0,T_0).$$

Hierbei ist zu bemerken, dass es nach dem Sobolevschen Einbettungssatz ein allein vom

Intervall J abhängiges $s > 0$ mit

$$\tilde{v}^2(t) \leq s \cdot \sup_{r\in[0,t]} \|u(r)\|^2_{H^2(J)} \tag{2.30}$$

und

$$v^2(t) \leq s \cdot \sup_{r\in[0,t]} \|u(r)\|^2_{H^2(J)} + \sup_{(r,x)\in[0,t]\times J} \{|q_t| + |\varphi_t|\}(r,x) \leq s \cdot \mathcal{E}(t) \tag{2.31}$$

gibt.

Beweis zu Lemma 2.6: Es gilt

$$\mathcal{E}(0) = \|u_0\|^2_{H^2} + \int_0^1 \left\{q_t^2 + q_{xt}^2 + q_{tt}^2 + \varphi_t^2 + \varphi_{xt}^2 + \varphi_{tt}^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Summanden des Integrals werden nun einzeln gegen $\|u_0\|^2_{H^2}$ abgeschätzt. Aus Gleichung (2.25) lesen wir

$$q_t(0,\cdot) = -\frac{1}{A(\varphi_0)}\left[B(\varphi_0)q_0 + C(\varphi_0)\varphi_0'\right]$$

ab. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt direkt die Abschätzung

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i\right)^2 \leq N \cdot \sum_{i=1}^N a_i^2 \qquad \text{für} \quad N \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_1, ..., a_N \in \mathbb{R}. \tag{2.32}$$

Damit und mit der Beschränktheit der Koeffizienten erhält man

$$q_t^2(0,x) \leq \frac{2}{\underline{A}^2}\left[B^2(\varphi_0)q_0^2 + C^2(\varphi_0)\left(\varphi_0'\right)^2\right](x)$$

für alle $x \in J$, was nach Integration

$$\int_0^1 q_t^2(0,x)\,\mathrm{d}x \leq \Gamma \int_0^1 \left\{q^2 + \varphi_x^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \leq \Gamma \cdot \|u_0\|^2_{H^2} \tag{2.33}$$

ergibt. Analog folgt aus Gleichung (2.26)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_t^2(0,x)\,\mathrm{d}x &\leq \Gamma \int_0^1 \left\{q_x^2 + (q\varphi_x)^2 + q^4 + f^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \Gamma \int_0^1 \left\{q_x^2 + f^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x + \Gamma \cdot \sup_{x\in J}\left(q^2(0,x)\right) \cdot \int_0^1 \left\{\varphi_x^2 + q^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \Gamma \cdot \left(\|u_0\|^2_{H^2} + \tilde{v}^2(0) \cdot \|u_0\|^2_{H^2} + \|f(0)\|^2_{L^2}\right) \\ &\leq \Gamma \cdot \left(\|u_0\|^2_{H^2} + \|u_0\|^4_{H^2} + \|f(0)\|^2_{L^2}\right), \end{aligned} \tag{2.34}$$

wobei hier verwendet wurde, dass nach Satz 2.3 $|1 + D| \geq \frac{1}{2}$ ist und wegen (2.30) $\tilde{v}^2(0) \leq \Gamma \cdot \|u_0\|^2_{H^2}$ gilt.

Ableiten der Gleichungen (2.25) und (2.26) nach x ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= A_x q_t + A q_{xt} + B_x q + B q_x + C_x \varphi_x + C \varphi_{xx} \\ f_x &= C_x q_x + C q_{xx} + \varphi_{xt} + D_x \varphi_t + D \varphi_{xt} \\ &\quad + E_x q \varphi_x + E q_x \varphi_x + E q \varphi_{xx} + F_x q^2 + 2 F q q_x \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$0 = A' \varphi_x q_t + A q_{xt} + B' \varphi_x q + B q_x + C' \varphi_x^2 + C \varphi_{xx} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} f_x &= C' \varphi_x q_x + C q_{xx} + \varphi_{xt} + (\nabla D)_1 \, q_x \varphi_t + (\nabla D)_2 \, \varphi_x \varphi_t + D \varphi_{xt} \\ &\quad + E' \varphi_x^2 q + E q_x \varphi_x + E q \varphi_{xx} + F' \varphi_x q^2 + 2 F q q_x . \end{aligned} \tag{2.36}$$

Gleichung (2.35) liefert mit (2.33)

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_{xt}^2(0,x)\,\mathrm{d}x \le \Gamma \int_0^1 & \left\{ \varphi_{xx}^2 + q_x^2 + (q_t \varphi_x)^2 + (q \varphi_x)^2 + \varphi_x^4 \right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\ \le \; & \Gamma \int_0^1 \left\{ \varphi_{xx}^2 + q_x^2 \right\}(0,x)\,\mathrm{d}x + \Gamma \tilde{v}^2(0) \int_0^1 \left\{ q^2 + q_t^2 + \varphi_x^2 \right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\ \le \; & \Gamma \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^4 \right) \end{aligned} \tag{2.37}$$

und Gleichung (2.36) liefert mit (2.34)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{xt}^2(0,x)\,\mathrm{d}x &\le \Gamma \int_0^1 \left\{ q_{xx}^2 + (q_x \varphi_x)^2 + (q_x \varphi_t)^2 + (\varphi_x \varphi_t)^2 + (\varphi_{xx} q)^2 \right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \; \Gamma \int_0^1 \left\{ (q_x \varphi_x)^2 + \left(q \varphi_x^2 \right)^2 + (q q_x)^2 + \left(q^2 \varphi_x \right)^2 + f_x^2 \right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &\le \Gamma \int_0^1 \left\{ q_{xx}^2 + f_x^2 \right\}(0,x)\,\mathrm{d}x + \Gamma \tilde{v}^2(0) \int_0^1 \left\{ q_x^2 + \varphi_x^2 + \varphi_{xx}^2 \right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \Gamma \tilde{v}^4(0) \int_0^1 \left\{ q^2 + \varphi_x^2 \right\}(0,x)\,\mathrm{d}x + \Gamma \tilde{v}^2(0) \int_0^1 \varphi_t^2(0,x)\,\mathrm{d}x \\ &\le \Gamma \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^4 + \|u_0\|_{H^2}^6 + \|f_x(0)\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^2 \|f(0)\|_{L^2}^2 \right) . \end{aligned} \tag{2.38}$$

Wir leiten nun (2.25) und (2.26) nach t ab und erhalten

$$0 = A_t q_t + A q_{tt} + B_t q + B q_t + C_t \varphi_x + C \varphi_{xt} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} f_t &= C_t q_x + C q_{xt} + \varphi_{tt} + D_t \varphi_t + D \varphi_{tt} \\ &\quad + E_t q \varphi_x + E q_t \varphi_x + E q \varphi_{xt} + F_t q^2 + 2 F q q_t \end{aligned} \tag{2.40}$$

beziehungsweise

$$
\begin{aligned}
(2.41) \qquad 0 &= A'\varphi_t q_t + A q_{tt} + B'\varphi_t q + B q_t + C'\varphi_t\varphi_x + C\varphi_{xt} \\
f_t &= C'\varphi_t q_x + C q_{xt} + \varphi_{tt} + (\nabla D)_1 q_t\varphi_t + (\nabla D)_2 \varphi_t^2 + D\varphi_{tt} \\
(2.42) \qquad &\quad + E'\varphi_t q\varphi_x + E q_t\varphi_x + E q\varphi_{xt} + F'\varphi_t q^2 + 2F q q_t.
\end{aligned}
$$

Aus Gleichung (2.41) folgt zusammen mit (2.31), (2.33) und (2.38)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 q_{tt}^2(0,x)\,\mathrm{d}x &\le \Gamma \int_0^1 \left\{(\varphi_t q_t)^2 + q_t^2 + (q\varphi_t)^2 + (\varphi_x\varphi_t)^2 + \varphi_{xt}^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\
&\le \Gamma \int_0^1 \left\{q_t^2 + \varphi_{xt}^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x + \Gamma v^2(0)\int_0^1 \left\{q^2 + q_t^2 + \varphi_x^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\
&\le \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^4 + \|u_0\|_{H^2}^6 + \|f_x(0)\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^2\|f(0)\|_{L^2}^2\right) \\
&\quad +\Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2\cdot\mathcal{E}(0)\right)
\end{aligned}
$$

und schließlich aus Gleichung (2.42) zusammen mit (2.33),(2.34),(2.37) und (2.38)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_{tt}^2(0,x)\,\mathrm{d}x &\le \Gamma \int_0^1 \left\{(q_x\varphi_t)^2 + q_{xt}^2 + (q_t\varphi_t)^2 + \varphi_t^4 + (q\varphi_x\varphi_t)^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad +\Gamma \int_0^1 \left\{(q_t\varphi_x)^2 + (q\varphi_{xt})^2 + \left(q^2\varphi_t\right)^2 + (qq_t)^2 + f_t^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \\
&\le \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^4 + \|u_0\|_{H^2}^6 + \|u_0\|_{H^2}^8\right) \\
&\quad +\Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^4\|f(0)\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^2\|f_x(0)\|_{L^2}^2 + \|f_t(0)\|_{L^2}^2\right) \\
&\quad +\Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_0\|_{H^2}^4 + \|f(0)\|_{L^2}^2\right)\cdot\mathcal{E}(0)
\end{aligned}
$$

Wir gehen ohne Einschränkung davon aus, dass $\delta_0 \le 1$, also insbesondere $\|u_0\|_{H^2}^2 \le 1$ ist. Damit zeigen die obigen Abschätzungen, dass es ein $\Gamma > 0$ gibt, so dass

$$
\mathcal{E}(0) \le \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right)\mathcal{E}(0)
$$

gilt. Offensichtlich gibt es zu jedem $\bar{\mathcal{E}} > 0$ ein $\delta_0 > 0$ mit $\Gamma\cdot\delta_0^2 \le \frac{1}{2}$ und $2\Gamma\cdot\delta_0^2 < \bar{\mathcal{E}}$, so dass

$$
(2.43) \qquad \mathcal{E}(0) \le 2\Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) < \bar{\mathcal{E}}
$$

folgt und somit Lemma 2.6 bewiesen ist. □

Beweis zu Lemma 2.7: Allgemein gilt für $q \in C^1\left([0,T_0), L^2(J)\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 q^2(t,x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\int_0^1 \frac{q^2(t+h,x)-q^2(t,x)}{h}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{h\to 0}\int_0^1 \frac{q^2(t+h,x)-q(t+h,x)q(t,x)+q(t+h,x)q(t,x)-q^2(t,x)}{h}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{h\to 0}\int_0^1 q(t+h,x)\cdot\frac{q(t+h,x)-q(t,x)}{h}+\frac{q(t+h,x)-q(t,x)}{h}\cdot q(t,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 q(t,x)q_t(t,x)+q_t(t,x)q(t,x)\,\mathrm{d}x, \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

wobei beim Grenzübergang die Regularität von q ausgenutzt wurde.
Seien nun $A \in C^2(\mathbb{R})$ und $\varphi \in X_2\left([0,T_0), J\right)$ beliebig. Dann gilt mit Behauptung B.7, dass die Verknüpfung $A\circ\varphi$ in $X_2\left([0,T_0), J\right)$ liegt.
Für diese Funktion kann deshalb, analog zu (2.44), gezeigt werden, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 A(\varphi)q^2(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{2A(\varphi)qq_t + \left(A(\varphi)\right)_t q^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x \qquad (2.45)$$

gilt. Dies werden wir in den folgenden Rechnungen häufig verwenden.
Für $t \in [0,T_0)$ multiplizieren wir die Gleichungen (2.25) und (2.26) mit q bzw. φ und integrieren über $(0,t)\times J$. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^1 \left\{Aq_tq + Bq^2 + C\varphi_xq\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= 0 \\
\int_0^t\int_0^1 \left\{Cq_x\varphi + \varphi_t\varphi + D\varphi_t\varphi + Eq\varphi_x\varphi + Fq^2\varphi\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \int_0^t\int_0^1 f\varphi(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Wegen $u \in X_2\left([0,t], J\right) \subset C^1\left([0,t], L^2(J)\right)$ und $A \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$ erhält man analog zu (2.45)

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^1 \varphi\varphi_t(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \varphi^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \qquad \text{und} \\
\int_0^t\int_0^1 Aqq_t(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 Aq^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s - \int_0^t\int_0^1 \frac{1}{2}A_tq^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Nach partieller Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt sich außerdem

$$\int_0^t\int_0^1 C(\varphi_xq+q_x\varphi)(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = -\int_0^t\int_0^1 C_x\varphi q(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = -\int_0^t\int_0^1 (C)'\varphi_x\varphi q(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,$$

womit wir durch Addition der ersten beiden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{Aq^2+\varphi^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 Bq^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{Aq^2+\varphi^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 f\varphi(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t\int_0^1 \left\{\frac{1}{2}(A)'\varphi_t q^2 - D\varphi_t\varphi + (C)'\varphi_x\varphi q - Eq\varphi_x\varphi - Fq^2\varphi\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\le \Gamma\int_0^1 \left\{q_0^2+\varphi_0^2\right\}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 |f\varphi|(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \Gamma\int_0^t\int_0^1 \left\{|\varphi_t q^2| + |D\varphi_t\varphi| + |q^2\varphi| + |q\varphi_x\varphi|\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\overset{(*)}{\le} \Gamma\cdot\|u_0\|_{H^2}^2 + v(t)R_2(t) + \Gamma\left(v(t)+v^2(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t) \qquad \text{für} \quad t\in[0,T_0).
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

erhalten. Hierbei wurde für die erste Abschätzung die Beschränktheit der Koeffizienten und deren Ableitungen ausgenutzt.
Es wird nun an vier Termen beispielhaft demonstriert, wie die Ungleichung $(*)$ zustandekommt. Die meisten noch folgenden Abschätzungen können mit analoger Argumentation begründet werden.

$$
\int_0^t\int_0^1 |\varphi_t q^2|(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le \sup_{(s,x)\in[0,t]\times J}\left(|\varphi_t(s,x)|\right)\cdot\int_0^t\int_0^1 q^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le v(t)\cdot\mathcal{E}(t)
$$

Mit der Ungleichung

$$
|ab| \le \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\varepsilon}+\varepsilon b^2\right) \qquad \text{für} \quad a,b\in\mathbb{R}, \varepsilon>0 \tag{2.47}
$$

gilt insbesondere für $\varepsilon = 1$

$$
\int_0^t\int_0^1 |q\varphi_x\varphi|(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le v(t)\cdot\int_0^t\int_0^1 \frac{1}{2}\{q^2+\varphi_x^2\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le \Gamma v(t)\cdot\mathcal{E}(t).
$$

Dabei ist zu beachten, dass der Term $\int_0^t\int_0^1 \varphi^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$ nicht direkt gegen $\mathcal{E}(t)$ abgeschätzt werden kann. Für die gewünschte Art von Abschätzung muss statt dessen $|\varphi(s,x)|$, wie oben, stets gegen $v(t)$ abgeschätzt werden. Außerdem sei erwähnt, dass auf obige Weise nur Terme, die aus mindestens drei Faktoren bestehen, abgeschätzt werden können. Für den Term $\int_0^t\int_0^1 |D\varphi_t\varphi|(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$ benötigen wir deshalb Eigenschaft (vii) in Satz 2.3, die uns ein $K>0$ liefert mit $|D(q,\varphi)|\le Kq^2$. Damit ist

$$
\int_0^t\int_0^1 |D\varphi_t\varphi|(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le K\int_0^t\int_0^1 |q^2\varphi_t\varphi|(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le \Gamma v^2(t)\cdot\mathcal{E}(t).
$$

Mit der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^1 |f\varphi|(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &\leq v(t)\int_0^t \|f(s)\|_{L^1(J)}\,\mathrm{d}s\\ \leq\ \ & v(t)\int_0^t \|f(s)\|_{L^2(J)}\,\mathrm{d}s \leq v(t)R_2(t).\end{aligned}$$

Die linke Seite von (2.46) kann durch

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{Aq^2+\varphi^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 Bq^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\geq\ \ \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\underline{A}q^2+\varphi^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 \underline{B}q^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\geq\ \ \min\left\{\underline{A},\underline{B},1\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{q^2+\varphi^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 q^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

abgeschätzt werden, was insgesamt

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left\{q^2+\varphi^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 q^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\leq\ \ \Gamma\cdot\|u_0\|^2_{H^2} + v(t)R_2(t) + \Gamma\left(v(t)+v^2(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t)\end{aligned}\tag{2.48}$$

für $t \in [0, T_0)$ beweist.

Wir multiplizieren nun (2.39) und (2.40) mit q_t bzw. φ_t, addieren beide Gleichungen und integrieren anschließend über J und $[0,t]$.

Aufgrund der Regularitäten $u_t \in C^1([0,t], L^2(J))$ und $A(\varphi) \in C^1([0,t], L^2(J))$ gelten zu (2.45) analoge Gleichungen.

Damit und mit $\int_0^t\int_0^1 C_x\varphi_t q_t(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = -\int_0^t\int_0^1 \left\{C\varphi_{xt}q_t + Cq_{xt}\varphi_t\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$ erhalten wir

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{Aq_t^2+\varphi_t^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 Bq_t^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &=\ \ \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{Aq_t^2+\varphi_t^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x - \int_0^t\int_0^1 \left\{\frac{1}{2}A_tq_t^2 + B_tqq_t + C_tq_x\varphi_t\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &-\int_0^t\int_0^1 \left\{C_t\varphi_xq_t - C_x\varphi_tq_t + D_t\varphi_t^2 + D\varphi_{tt}\varphi_t + E_tq\varphi_x\varphi_t + Eq_t\varphi_x\varphi_t\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &-\int_0^t\int_0^1 \left\{Eq\varphi_{xt}\varphi_t + F_tq^2\varphi_t + 2Fqq_t\varphi_t\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_0^t\int_0^1 f_t\varphi_t(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Die Abschätzungen (2.33) und (2.34) beweisen mit der Voraussetzung $\|u_0\|^2_{H^2} \leq 1$, dass

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{Aq_t^2+\varphi_t^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x \leq \Gamma\cdot\left(\|u_0\|^2_{H^2} + \|f(0)\|^2_{L^2}\right)$$

gilt.

Die übrigen Terme der rechten Seite von (2.49) können analog zu den obigen Beispielen problemlos abgeschätzt werden, da „$\int\int\varphi^2$“ nicht auftritt und außer $\int_0^t\int_0^1 D\varphi_{tt}\varphi_t(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$ alle Summanden aus mindestens drei Faktoren bestehen, wobei darauf hingewiesen sei, dass A_t für $(A(\varphi))_t = A'(\varphi)\varphi_t$, D_t für $(D(q,\varphi))_t = (\nabla D)_1\, q_t + (\nabla D)_2\,\varphi_t$ usw. steht.
Um $\int_0^t\int_0^1 D\varphi_{tt}\varphi_t(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$ abzuschätzen, nutzen wir wieder Eigenschaft (vii) in Satz 2.3 aus.
Somit folgt aus (2.49)

$$
\begin{aligned}
(2.50)\qquad & \int_0^1 \left\{q_t^2+\varphi_t^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 q_t^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
& \leq\ \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2+\|f(0)\|_{L^2}^2\right)+v(t)R_2(t)+\Gamma\left(v(t)+v^2(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t).
\end{aligned}
$$

Aus den Gleichungen (2.25) und (2.26) folgt mit (2.32)

$$
\varphi_x^2 \leq \Gamma(q_t^2+q^2)
$$

und

$$
q_x^2 \leq \Gamma(\varphi_t^2+q^2\varphi_x^2+q^4+f^2),
$$

und daraus mit Hilfe von (2.48) und (2.50)

$$
\begin{aligned}
(2.51)\qquad & \int_0^1 \varphi_x^2(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 \varphi_x^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
& \leq\ \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2+\|f(0)\|_{L^2}^2\right)+v(t)R_2(t)+\Gamma\left(v(t)+v^2(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(2.52)\qquad & \int_0^1 q_x^2(t,x)\,\mathrm{d}x \leq \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2+\|f(0)\|_{L^2}^2\right) \\
& +\ \ \Gamma\cdot\|f(t)\|_{L^2}^2+v(t)R_2(t)+\Gamma\left(v(t)+v^2(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t)
\end{aligned}
$$

für alle $t\in[0,T_0)$.
Die bisherigen Ergebnisse, d.h. (2.48), (2.50), (2.51) und (2.52), ergeben zusammengefaßt für $t\in[0,T_0)$ die folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \left\{q^2+q_t^2+q_x^2+\varphi^2+\varphi_t^2+\varphi_x^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 \left\{q^2+q_t^2+\varphi_x^2\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
(2.53)\qquad & \leq\ \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2+\|f(0)\|_{L^2}^2\right)+\Gamma\cdot\|f(t)\|_{L^2}^2+v(t)R_2(t)+\Gamma\left(v(t)+v^2(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t).
\end{aligned}
$$

Behauptung 2.8

Für Lösungen $(q, \varphi) \in X_2([0, T_0), J)$ zu (2.25)-(2.28) gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{Aq_{tt}^2 + (1+D)\varphi_{tt}^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 Bq_{tt}^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{Aq_{tt}^2 + (1+D)\varphi_{tt}^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int_0^t\int_0^1 \left\{A_t q_{tt}^2 + D_t\varphi_{tt}^2\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_0^t\int_0^1 \left\{B_{tt}qq_{tt} + 2B_t q_t q_{tt} + A_{tt}q_t q_{tt} + D_{tt}\varphi_t\varphi_{tt}\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_0^t\int_0^1 \left\{E_{tt}q\varphi_x\varphi_{tt} + 2E_t q_t\varphi_x\varphi_{tt} + 2E_t q\varphi_{xt}\varphi_{tt} + Eq_{tt}\varphi_x\varphi_{tt}\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_0^t\int_0^1 \left\{2Eq_t\varphi_{xt}\varphi_{tt} + C_{tt}\varphi_x q_{tt} + 2C_t\varphi_{xt}q_{tt} + C_{tt}q_x\varphi_{tt} + 2C_t q_{xt}\varphi_{tt}\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_0^t\int_0^1 \left\{F_{tt}q^2\varphi_{tt} + 4F_t qq_t\varphi_{tt} + 2Fq_t^2\varphi_{tt} + 2Fqq_{tt}\varphi_{tt}\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t\int_0^1 \left\{C_x q_{tt}\varphi_{tt} + \frac{1}{2}E_x q\varphi_{tt}^2 + \frac{1}{2}Eq_x\varphi_{tt}^2\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_0^t\int_0^1 f_{tt}\varphi_{tt}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

für alle $t \in [0, T_0)$.

Beweis: *Formal* könnte man (2.54) analog zu den Gleichungen in (2.46) und (2.49) erhalten. Dabei würden aber „nichtexistierende“ dritte Ableitungen der Funktionen q und φ in der Rechnung auftreten. Deshalb wird (2.54) hier mittels Approximation durch Differenzenquotienten bewiesen.

Dazu definieren wir zu $h \in (0, T_0)$ einen *Differenzenoperator* Δ_h durch

$$[\Delta_h w](t,x) := w(t+h,x) - w(t,x)$$

für Funktionen $w : [0, T_0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ und $(t,x) \in [0, T_0 - h) \times \Omega$.

Wir wenden Δ_h auf (2.39) und (2.40) an, multiplizieren die erhaltenen Gleichungen mit $\Delta_h q_t$ bzw. $\Delta_h \varphi_t$ und addieren sie.

Anschließend integrieren wir über $[0,t] \times J$, führen einige partielle Integrationen durch, multiplizieren die Gleichung mit $\frac{1}{h^2}$, bilden den Grenzwert $h \to 0$ und erhalten so (2.54).

Diese Methode angewandt auf die Summanden der Gleichungen (2.39) und (2.40), die in $C^1([0,T], L^2(J))$ liegen, liefert das Integral über die L^2-Ableitung dieser Funktionen. Um solche Terme müssen wir uns daher keine Gedanken machen. Problematisch sind die nicht differenzierbaren Summanden Aq_{tt}, $(1+D)\varphi_{tt}$, $Eq\varphi_{xt}$, $C\varphi_{xt}$ und Cq_{xt}.

Zur besseren Übersicht schreiben wir in den folgenden Rechnungen w^t anstelle von $w(t,x)$ und w^{th} anstelle von $w(t+h,x)$.

Für die problematischen Summanden werden nun die notwendigen Rechenschritte einzeln vorgeführt.

Aq_{tt}**:**
Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^1 \Delta_h \left(A^s q_{tt}^s\right) \Delta_h(q_t^s) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s &= \int_0^t \int_0^1 \left(A^s q_{tt}^s - A^{sh} q_{tt}^{sh}\right) \left(q_t^s - q_t^{sh}\right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_0^1 \left((A^s - A^{sh}) q_{tt}^s + A^{sh} \left(q_{tt}^s - q_{tt}^{sh}\right)\right) \left(q_t^s - q_t^{sh}\right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_0^1 A^{sh} \left(q_{tt}^s - q_{tt}^{sh}\right) \left(q_t^s - q_t^{sh}\right) + \frac{1}{2} A_t^{sh} \left(q_t^s - q_t^{sh}\right)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{2} A_t^{sh} \left(q_t^s - q_t^{sh}\right)^2 - \left(A^s - A^{sh}\right) \left(q_t^s - q_t^{sh}\right) q_{tt}^s \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

und, da $q_t \in C^1\left([0, T_0), L^2(J)\right)$ und $A \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$ ist, erhält man analog zu (2.45) außerdem

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^1 A^{sh} \left(q_{tt}^s - q_{tt}^{sh}\right) \left(q_t^s - q_t^{sh}\right) + \frac{1}{2} A_t^{sh} \left(q_t^s - q_t^{sh}\right)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 A^{sh} \left(q_t^s - q_t^{sh}\right)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^1 A^{th} \left(q_t^t - q_t^{th}\right)^2 - A^{0h} \left(q_t^0 - q_t^{0h}\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 A^{th} \Delta_h \left(q_t^t\right)^2 - A^{0h} \Delta_h \left(q_t^0\right)^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergeben diese beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \int_0^t \int_0^1 \Delta_h \left(A^s q_{tt}^s\right) \Delta_h(q_t^s) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \int_0^1 A^{th} \frac{\Delta_h \left(q_t^t\right)^2}{h^2} - A^{0h} \frac{\Delta_h \left(q_t^0\right)^2}{h^2} \,\mathrm{d}x \\
&\quad - \lim_{h \to 0} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{2} A_t^{sh} \frac{\Delta_h \left(q_t^s\right)^2}{h^2} - \frac{\Delta_h \left(A^s\right)}{h} \cdot \frac{\Delta_h \left(q_t^s\right)}{h} \cdot q_{tt}^s \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 A q_{tt}^2(t, x) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^1 A q_{tt}^2(0, x) \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 A_t q_{tt}^2(s, x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

wobei beim Grenzübergang augenutzt wurde, dass nach Behauptung B.7 $A = A(\varphi) \in C^1\left([0, T_0), L^2(J)\right)$ und $q \in C^2\left([0, T_0), L^2(J)\right)$ gilt.

Der Summand $(1 + D)\varphi_{tt}$ kann völlig analog behandelt werden.

$Eq\varphi_{xt}$**:**
Es gilt mit partieller Integration unter Berücksichtigung der Randbedingung

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Delta_h \left(E^t q^t \varphi_{xt}^t\right) \Delta_h \left(\varphi_t^t\right) \,\mathrm{d}x \\
= &\int_0^1 \left(\left(E^t q^t - E^{th} q^{th}\right) \varphi_{xt}^t + E^{th} q^{th} \left(\varphi_{xt}^t - \varphi_{xt}^{th}\right)\right) \left(\varphi_t^t - \varphi_t^{th}\right) \,\mathrm{d}x \\
= &\int_0^1 \left(E^t q^t - E^{th} q^{th}\right) \varphi_{xt}^t \left(\varphi_t^t - \varphi_t^{th}\right) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(E^{th} q^{th}\right)_x \left(\varphi_t^t - \varphi_t^{th}\right)^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int_0^1 \Delta_h(E^t q^t \varphi_{xt}^t) \Delta_h \left(\varphi_t^t\right) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ (Eq)_t \varphi_{xt} \varphi_{tt} - \frac{1}{2} (Eq)_x \varphi_{tt}^2 \right\} (t,x) \,\mathrm{d}x.$$

$C\varphi_{xt}$ und Cq_{xt}:
Auch hier liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Delta_h \left(C^t \varphi_{xt}^t\right) \Delta_h(q_t) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\left(C^t - C^{th}\right) \varphi_{xt}^t + C^{th} \left(\varphi_{xt}^t - \varphi_{xt}^{th}\right)\right) \left(q_t^t - q_t^{th}\right) \,\mathrm{d}x \\
= &\int_0^1 \left(C^t - C^{th}\right) \varphi_{xt}^t \left(q_t^t - q_t^{th}\right) + \frac{1}{2} C^{th} \left(\varphi_{xt}^t - \varphi_{xt}^{th}\right) \left(q_t^t - q_t^{th}\right) \,\mathrm{d}x \\
&-\frac{1}{2} \int_0^1 C_x^{th} \left(\varphi_t^t - \varphi_t^{th}\right) \left(q_t^t - q_t^{th}\right) + C^{th} \left(\varphi_t^t - \varphi_t^{th}\right) \left(q_{xt}^t - q_{xt}^{th}\right) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Analog erhält man eine entsprechende Umformung für $\int_0^1 \Delta_h \left(C^t q_{xt}^t\right) \Delta_h \left(\varphi_t^t\right) \,\mathrm{d}x$, was zusammen

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Delta_h \left(C^t \varphi_{xt}^t\right) \Delta_h \left(q_t^t\right) + \Delta_h \left(C^t q_{xt}^t\right) \Delta_h \left(\varphi_t^t\right) \,\mathrm{d}x \\
= &\int_0^1 \left(C^t - C^{th}\right) \left(\varphi_{xt}^t \left(q_t^t - q_t^{th}\right) + q_{xt}^t \left(\varphi_t^t - \varphi_t^{th}\right)\right) \,\mathrm{d}x \\
&- \int_0^1 C_x^{th} \left(\varphi_t^t - \varphi_t^{th}\right) \left(q_t^t - q_t^{th}\right) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int_0^1 \Delta_h \left(C^t \varphi_{xt}^t\right) \Delta_h \left(q_t^t\right) + \Delta_h \left(C^t q_{xt}^t\right) \Delta_h \left(\varphi_t^t\right) \,\mathrm{d}x \\
= &\int_0^1 \left\{ C_t \left(\varphi_{xt} q_{tt} + q_{xt} \varphi_{tt}\right) - C_x \varphi_{tt} q_{tt} \right\} (t,x) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ergibt.

Mit diesen Nebenrechnungen folgt (2.54) aus der „Gleichung"

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(\Delta_h\left((2.39)\right)\cdot\Delta_h\left(q_t^t\right)+\Delta_h\left((2.40)\right)\cdot\Delta_h\left(\varphi_t^t\right)\right).$$

□

Unter der Voraussetzung, dass $\|u_0\|_{H^2}\leq 1$ ist, folgt aus (2.54) mit (2.43) und den üblichen Abschätzungen

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left\{q_{tt}^2+\varphi_{tt}^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1 q_{tt}^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ \leq\ &\int_0^t\int_0^1 f_{tt}\varphi_{tt}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2+|||f(0)|||_1^2\right)+\Gamma\left(v(t)+v^2(t)+v^3(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t).\end{aligned}$$

Mit der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^1 f_{tt}\varphi_{tt}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\leq\int_0^t\|f_{tt}(s)\|_{L^2}\|\varphi_{tt}(s)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s\\ \leq\ &\sup_{s\in[0,t]}\left(\|\varphi_{tt}(s)\|_{L^2}\right)\cdot\int_0^t\|f_{tt}(s)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s\leq\sqrt{\mathcal{E}(t)}\cdot R_2(t).\end{aligned}$$

Zusammen mit (2.53) ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left\{q^2+q_t^2+q_{tt}^2+q_x^2+\varphi^2+\varphi_t^2+\varphi_{tt}^2+\varphi_x^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x\\ &+\int_0^t\int_0^1\left\{q^2+q_t^2+q_{tt}^2+\varphi_x^2\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\leq\Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2+|||f(0)|||_1^2\right)\\ &+\Gamma\cdot\|f(t)\|_{L^2}^2+\left(v(t)+\sqrt{\mathcal{E}(t)}\right)\cdot R_2(t)+\Gamma\left(v(t)+v^2(t)+v^3(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t).\end{aligned}\tag{2.55}$$

Nun lösen wir (2.41) nach φ_{xt} und (2.42) nach q_{xt} auf, quadrieren beide Gleichung und erhalten mit (2.32)

$$\varphi_{xt}^2\leq\Gamma\left(q_{tt}^2+q_t^2+q_t^2\varphi_t^2+q^2\varphi_t^2+\varphi_x^2\varphi_t^2\right)$$

und

$$q_{xt}^2\leq\Gamma\left(\varphi_{tt}^2+q_x^2\varphi_t^2+q_t^2\varphi_t^2+\varphi_t^4+q^2\varphi_{xt}^2+q_t^2\varphi_x^2+q^2\varphi_x^2\varphi_t^2+q^2q_t^2+q^4\varphi_t^2+f_t^2\right).$$

Analog zu früheren Abschätzungen ergibt dies mit Hilfe von (2.55)

$$\begin{aligned}&\int_0^1\varphi_{xt}^2(t,x)\,\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1\varphi_{xt}^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\leq\Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2+|||f(0)|||_1^2\right)\\ &+\Gamma\cdot\|f(t)\|_{L^2}^2+\left(v(t)+\sqrt{\mathcal{E}(t)}\right)\cdot R_2(t)+\Gamma\left(v(t)+v^2(t)+v^3(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t)\end{aligned}\tag{2.56}$$

und

$$\int_0^1 q_{xt}^2(t,x)\,\mathrm{d}x \le \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \Gamma\cdot\left(\|f(t)\|_{L^2}^2 + \|f_t(t)\|_{L^2}^2\right) + \left(v(t)+\sqrt{\mathcal{E}(t)}\right)\cdot R_2(t) + \Gamma\left(v(t)+v^2(t)+v^3(t)+v^4(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t). \tag{2.57}$$

für $t\in[0,T_0)$. Aus den Gleichungen (2.35) und (2.36) erhält man, wie oben,

$$\varphi_{xx}^2 \le \Gamma\left(\varphi_x^4 + \varphi_x^2 q_t^2 + q_{xt}^2 + \varphi_x^2 q^2 + q_x^2\right)$$

und

$$q_{xx}^2 \le \Gamma\left(\varphi_x^2 q_x^2 + \varphi_{xt}^2 + q_x^2\varphi_t^2 + \varphi_x^2\varphi_t^2 + \varphi_x^4 q^2 + q_x^2\varphi_x^2 + q^2\varphi_{xx}^2 + \varphi_x^2 q^4 + q^2 q_x^2 + f_x^2\right)$$

und damit

$$\int_0^1 \varphi_{xx}^2(t,x)\,\mathrm{d}x \le \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \Gamma\cdot\left(\|f(t)\|_{L^2}^2 + \|f_t(t)\|_{L^2}^2\right) + \left(v(t)+\sqrt{\mathcal{E}(t)}\right)\cdot R_2(t) + \Gamma\left(v(t)+v^2(t)+v^3(t)+v^4(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t) \tag{2.58}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^1 q_{xx}^2(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 q_{xx}^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le\ & \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \Gamma\cdot\left(\|f(t)\|_{L^2}^2 + \|f_x(t)\|_{L^2}^2\right)\\ &+\left(v(t)+\sqrt{\mathcal{E}(t)}\right)\cdot R_2(t) + \Gamma\left(v(t)+v^2(t)+v^3(t)+v^4(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t).\end{aligned} \tag{2.59}$$

Wir fassen die Gleichungen (2.55)-(2.59) zusammen und erhalten

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \{q^2+q_t^2+q_{tt}^2+q_x^2+q_{xx}^2+q_{xt}^2+\varphi^2+\varphi_t^2+\varphi_{tt}^2+\varphi_x^2+\varphi_{xx}^2+\varphi_{xt}^2\}(x,t)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_0^t\int_0^1\{q^2+q_t^2+q_{tt}^2+q_{xx}^2+\varphi_x^2+\varphi_{xt}^2\}(x,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\ &\le \Gamma\cdot\left(\|u_0\|_{H^2}^2+|||f(0)|||_1^2\right)+\Gamma\cdot R_1(t)+\left(v(t)+\sqrt{\mathcal{E}(t)}\right)\cdot R_2(t)\\ &\quad+\Gamma\left(v(t)+v^4(t)\right)\cdot\mathcal{E}(t) \qquad \text{für}\quad t\in[0,T_0).\end{aligned} \tag{2.60}$$

Im letzten Schritt wurde dabei die einfach zu beweisende Ungleichung $\alpha^2+\alpha^3\le 2\alpha+\alpha^4$ für $\alpha>0$ verwendet.
Nun fehlen nur noch Abschätzungen für

$$\int_0^t\int_0^1\left\{q_x^2+q_{xt}^2+\varphi_t^2+\varphi_{xx}^2+\varphi_{tt}^2\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.$$

Partielle Integration unter Berücksichtigung der Randwerte liefert mit (2.60)

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^1 q_x^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= -\int_0^t \int_0^1 q q_{xx}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^1 \left\{q^2 + q_{xx}^2\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\le \Gamma \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \Gamma \cdot R_1(t) + \left(v(t) + \sqrt{\mathcal{E}(t)}\right) \cdot R_2(t) \\
&\quad +\Gamma\left(v(t) + v^4(t)\right) \cdot \mathcal{E}(t).
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Indem man zuerst bezüglich x und anschließend bezüglich t partiell integriert, erhält man für glatte Funktionen ϕ mit $\phi_t(\cdot,0) = \phi_t(\cdot,1) = 0$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^1 \phi_{xt}^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_0^1 \phi_{xx}\phi_{tt}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s - \int_0^1 \phi_t\phi_{xx}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \phi_t\phi_{xx}(0,x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Hierbei tritt im Zwischenschritt der Term $-\int_0^t \int_0^1 \phi_t\phi_{xxt}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$ auf.
Obwohl dritte Ableitungen der Lösung q im Allgemeinen nicht existieren, gilt (2.62) auch für q.
Dies kann man beweisen, indem man das System (2.25)-(2.26) durch Systeme S_n mit glatten Koeffizienten approximiert, so dass die Regularität der entsprechenden Lösungen q^n ausreicht, um für diese die Gleichheit (2.62) zu zeigen. Man versucht dann zu beweisen, dass diese Lösungen q^n in einer passenden Topologie gegen q konvergieren, so dass sich (2.62) von q^n auf q überträgt.
Dies zu zeigen, würde an dieser Stelle allerdings zu weit führen, so dass wir ohne Beweis davon ausgehen, dass (2.62) für q gilt.
Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^1 q_{xt}^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_0^1 q_{xx}q_{tt}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s - \int_0^1 q_t q_{xx}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q_t q_{xx}(0,x)\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^1 \left\{q_{xx}^2 + q_{tt}^2\right\}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{q_t^2 + q_{xx}^2\right\}(0,x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{q_t^2 + q_{xx}^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \quad t \in [0,T_0).
\end{aligned}
$$

Mit (2.33) und (2.60) folgt daraus

$$\int_0^t \int_0^1 q_{xt}^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le \Gamma \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) \tag{2.63}$$
$$+\Gamma \cdot R_1(t) + \left(v(t) + \sqrt{\mathcal{E}(t)}\right) \cdot R_2(t) + \Gamma\left(v(t) + v^4(t)\right) \cdot \mathcal{E}(t).$$

Wir lösen nun (2.26) nach φ_t, (2.35) nach φ_{xx} und (2.42) nach φ_{tt} auf. So erhalten wir mit (2.32)

$$\varphi_t^2 \le \Gamma\left(q_x^2 + q^2\varphi_x^2 + q^4 + f^2\right),$$

$$\varphi_{xx}^2 \le \Gamma\left(q_{xt}^2 + q_x^2 + q_t^2\varphi_x^2 + q^2\varphi_x^2 + \varphi_x^4\right)$$

und

$$\varphi_{tt}^2 \le \Gamma\left(q_{xt}^2 + q_x^2\varphi_t^2 + q_t^2\varphi_t^2 + \varphi_t^4 + q^2\varphi_{xt}^2 + q_t^2\varphi_x^2 + q^2\varphi_x^2\varphi_t^2 + q^2q_t^2 + q^4\varphi_t^2 + f_t^2\right),$$

woraus mit (2.60), (2.61), (2.63) und den Ungleichungen

$$\alpha^2 + \alpha^3 \le 2\alpha + \alpha^4 \quad \text{und} \quad \alpha^2 \le \alpha + \alpha^3 \qquad \text{für} \quad \alpha > 0$$

die Abschätzung

$$\int_0^t \int_0^1 \varphi_t^2(s,x) + \varphi_{tt}^2(s,x) + \varphi_{xx}^2(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \le \Gamma \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right)$$
$$+\Gamma \cdot R_1(t) + \left(v(t) + \sqrt{\mathcal{E}(t)}\right) \cdot R_2(t) + \Gamma\left(v(t) + v^4(t)\right) \cdot \mathcal{E}(t),$$

folgt.
Damit haben wir gezeigt, dass für alle $t \in [0, T_0)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) \quad &\le \quad \Gamma \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \Gamma \cdot R_1(t) + \left(v(t) + \sqrt{\mathcal{E}(t)}\right) \cdot R_2(t) \\
&\qquad +\Gamma\left(v(t) + v^4(t)\right) \cdot \mathcal{E}(t) \\
&\overset{(2.31)}{\le} \quad \Gamma \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \Gamma \cdot R_1(t) + \Gamma\sqrt{\mathcal{E}(t)} \cdot R_2(t) \\
&\qquad +\Gamma\left(\sqrt{\mathcal{E}(t)} + \mathcal{E}^2(t)\right) \cdot \mathcal{E}(t)
\end{aligned}$$

gilt, womit Lemma 2.7 bewiesen ist. □

Lemma 2.9
Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $\|u(\cdot)\|_{H^2(J)}$ in $[0, T_0)$ beschränkt ist, falls $\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_2^2 \le \delta^2$ gilt.
Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann δ insbesondere so gewählt werden, dass $\|u\|_{C^0([0,T_0)\times J)} \le \varepsilon$ gilt.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $\delta \leq 1$. Dann ist Lemma 2.7 anwendbar und liefert ein $\bar{\Gamma} > 0$, so dass (2.29) gilt.
Zu diesem $\bar{\Gamma}$ wählen wir ein $\bar{\mathcal{E}} > 0$ mit

$$\bar{\Gamma}\left(\sqrt{\bar{\mathcal{E}}} + \bar{\mathcal{E}}^2\right) \leq \frac{1}{8}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gibt es ein $s > 0$, so dass für alle $w \in H^2(J)$ die Abschätzung $\|w\|_{C^0(J)} \leq s\|w\|_{H^1(J)}$ gilt.
Ohne Einschränkung gelte mit diesem s für $\bar{\mathcal{E}}$ zusätzlich

$$\bar{\mathcal{E}} \leq \frac{\varepsilon^2}{s^2}. \tag{2.64}$$

Lemma 2.6 liefert zu $\bar{\mathcal{E}}$ ein $\delta_0 > 0$, so dass für $\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2 \leq \delta_0^2$

$$\mathcal{E}(0) < \bar{\mathcal{E}} \tag{2.65}$$

gilt. Sei $0 < \delta \leq \min\{\delta_0, 1\}$ mit $\bar{\Gamma}\delta^2 \leq \frac{1}{8}\bar{\mathcal{E}}$ und die Anfangsdaten so, dass $\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2 \leq \delta^2$ und damit

$$\bar{\Gamma} \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) \leq \frac{1}{8}\bar{\mathcal{E}}$$

gilt. Außerdem seien $\delta_1 := \frac{c_0^2(\bar{\theta})}{8}\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{\Gamma}}$ und $\delta_2 := \frac{c_0(\bar{\theta})}{8}\frac{\sqrt{\bar{\mathcal{E}}}}{\bar{\Gamma}}$, womit aus den Forderungen (2.14) und (2.15) an die rechte Seite

$$\bar{\Gamma} \cdot R_1(t) \leq \frac{1}{8}\bar{\mathcal{E}} \quad \text{und} \quad \bar{\Gamma}\sqrt{\bar{\mathcal{E}}} \cdot R_2(t) \leq \frac{1}{8}\bar{\mathcal{E}}$$

für alle $t \geq 0$ folgt.

Annahme: Es gibt ein $t_1 \in [0, T_0)$ mit $\mathcal{E}(t_1) > \bar{\mathcal{E}}$.
Da q und φ in $X_2\left([0, T_0), J\right)$ liegen, ist $\mathcal{E}$ stetig. Wir finden also wegen (2.65) und dem Zwischenwertsatz ein $t_2 \in (0, t_1)$ mit $\mathcal{E}(t_2) = \bar{\mathcal{E}}$.
Mit (2.29) ist dann aber

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t_2) &\leq \bar{\Gamma} \cdot \left(\|u_0\|_{H^2}^2 + |||f(0)|||_1^2\right) + \bar{\Gamma} \cdot R_1(t_2) + \bar{\Gamma}\sqrt{\bar{\mathcal{E}}} \cdot R_2(t_2) + \bar{\Gamma}\left(\sqrt{\bar{\mathcal{E}}} + \bar{\mathcal{E}}^2\right) \cdot \bar{\mathcal{E}} \\ &\leq \frac{1}{8}\bar{\mathcal{E}} + \frac{1}{8}\bar{\mathcal{E}} + \frac{1}{8}\bar{\mathcal{E}} + \bar{\Gamma}\left(\sqrt{\bar{\mathcal{E}}} + \bar{\mathcal{E}}^2\right) \cdot \bar{\mathcal{E}} \leq \frac{1}{2}\bar{\mathcal{E}} < \bar{\mathcal{E}},\end{aligned}$$

was im Widerspruch zu $\mathcal{E}(t_2) = \bar{\mathcal{E}}$ steht.

Es gilt deshalb

$$\|u(t)\|_{H^2(J)}^2 \leq \mathcal{E}(t) \leq \bar{\mathcal{E}} \qquad \text{für alle} \quad t \in [0, T_0).$$

Nach Wahl $\bar{\mathcal{E}}$ ist außerdem $\|u(t,\cdot)\|_{C^0(J)}^2 \leq s^2\|u(t,\cdot)\|_{H^1(J)}^2 \leq s^2\mathcal{E}(t) \leq s^2\bar{\mathcal{E}} \leq \varepsilon^2$ für alle $t \in [0, T_0)$ und somit Lemma 2.9 bewiesen. □

Sei also δ klein genug und $\|u_0\|^2_{H^2(J)} + |||f(0)|||^2_2 \leq \delta^2$. Dann folgt mit Lemma 2.9 und den Überlegungen auf Seite 22 die globale Existenz der Lösung $u = (q, \varphi)$ zu (2.25)-(2.28) und es gilt $u \in X_2\left(\mathbb{R}_0^+, J\right)$.
Ohne Einschränkung sei δ so, dass mit Lemma 2.9 $\|u\|_{C^0} \leq \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}$ gilt.
Damit ist das zu u gehörende Paar $(q, \theta) = (q, \varphi + \bar{\theta})$ im homogenen Fall eine globale Lösung zu (2.1)-(2.3) und (2.6) und besitzt die in Satz 2.1 (i) geforderte Regularität.
Im inhomogenen Fall löst (q, θ) das entsprechende Problem zu den Gleichungen (2.11) und (2.12) und besitzt die in Satz 2.2 (i) geforderte Regularität.
Da $\bar{\varepsilon} \in \left(0, \bar{\theta}\right)$ ist, gilt außerdem $\theta(x, t) = \varphi(x, t) + \bar{\theta} \geq -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon} + \bar{\theta} > 0$ und damit die Eigenschaft (ii) im homogenen und inhomogenen Fall.

2.2.4 Konvergenzverhalten der Lösung

Bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Lösung nutzen wir die in [5], Seite 287/288, gegebenen Hinweise.
Sei die Funktion $I : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $I(t) := \int_0^1 q^2(t, x)\,\mathrm{d}x$.
(2.44) zeigt, dass I stetig differenzierbar ist mit $I'(t) = \int_0^1 2qq_t(t, x)\,\mathrm{d}x$.
Aus der Beschränktheit von $\mathcal{E}$ folgt insbesondere

$$\int_0^\infty \int_0^1 q^2(t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sup_{t \geq 0} \int_0^1 \left\{q^2 + q_t^2\right\}(t, x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

und damit

$$\int_0^\infty I(t)\,\mathrm{d}t < \infty \qquad \text{und} \qquad \sup_{t \geq 0} |I'(t)| = M \tag{2.66}$$

für ein $0 \leq M < \infty$.

Annahme: I konvergiert für $t \to \infty$ nicht gegen 0.

Dies bedeutet, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass es zu jedem $t_0 \geq 0$ ein $t \geq t_0$ gibt mit $I(t) > \varepsilon$.
Es gibt somit eine Folge $(t_n)_n \subset \mathbb{R}_0^+$ mit

$$t_{n+1} > t_n + \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{und} \qquad I(t_n) > \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sei $0 \leq \delta \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Dann gilt

$$I(t_n + \delta) = \int_{t_n}^{t_n+\delta} I'(t)\,\mathrm{d}t + I(t_n) > -M\delta + \varepsilon \geq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Da I nichtnegativ ist, folgt daraus

$$\int_0^{t_n} I(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_i+\frac{\varepsilon}{2M}} I(t)\,\mathrm{d}t > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = (n-1)\frac{\varepsilon^2}{4M} \to \infty \qquad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Dies steht im Widerspruch zu (2.66).

Es gilt also

$$\lim_{t\to\infty} \|q(t)\|^2_{L^2(J)} = \lim_{t\to\infty} I(t) = 0.$$

Völlg analog zeigt man

$$\lim_{t\to\infty} \|q_t(t)\|^2_{L^2(J)} = \lim_{t\to\infty} \|q_x(t)\|^2_{L^2(J)} = \lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(t)\|^2_{L^2(J)} = \lim_{t\to\infty} \|\varphi_x(t)\|^2_{L^2(J)} = 0,$$

womit Eigenschaft (v) in Satz 2.1 und Satz 2.2 gezeigt ist.
Der Sobolevsche Einbettungssatz liefert $\lim_{t\to\infty} \|q(t)\|_{C^0(J)} \leq s \cdot \lim_{t\to\infty} \|q(t)\|_{H^1(J)} = 0$, womit die Eigenschaft (iv) in den Sätzen 2.1 und 2.2 gezeigt ist.

Um die Konvergenz von θ zu beweisen zeigen wir zuerst:

Behauptung 2.10
Sei $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ eine Folge mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Falls die Folge $(\theta(t_n, 0))_n$ konvergiert, so konvergiert $(\theta(t_n, x))_n$ für alle $x \in J$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \theta(t_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \theta(t_n, x) \qquad \text{für alle} \quad x \in J.$$

Beweis: Sei $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ eine Folge mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und $\bar{\theta}_* > 0$ so, dass

$$\theta(t_n, 0) \to \bar{\theta}_* \qquad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Wir wollen zeigen, dass $\theta(t_n, x) \to \bar{\theta}_*$ für alle $x \in J$ gilt. Sei dazu $x \in J$ beliebig. Dann ist wegen $\theta(t, \cdot) \in C^1(J)$

$$\theta(t, x) = \int_0^x \theta_s(t, s)\,\mathrm{d}s + \theta(t, 0) \qquad \text{für alle} \quad t \geq 0.$$

Weiter gilt mit der Hölderschen Ungleichung und Satz 2.2 (v)

$$\lim_{t\to\infty} \left| \int_0^x \theta_s(t, s)\,\mathrm{d}s \right| \leq \lim_{t\to\infty} \|\theta_x(t)\|_{L^2} = 0.$$

Zusammen ergibt dies

$$\lim_{n\to\infty} \theta(t_n, x) = \lim_{k\to\infty} \theta(t_n, 0) = \bar{\theta}_*.$$

$\square$

Wir verwenden nun die in (0.3) beschriebene *Energiefunktion* $e(q,\theta) = e_0(\theta) + a(\theta)q^2$.

Behauptung 2.11
Falls $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^1 r(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = 0$ *gilt, so gibt es genau ein* $\bar{\theta}_* > 0$ *mit*

$$e_0\left(\bar{\theta}_*\right) = \int_0^1 \left\{e_0\left(\theta_0\right) + a\left(\theta_0\right) q_0^2\right\}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.67}$$

Insbesondere konvergiert unter dieser Voraussetzung jede Folge $\left(\theta\left(t_n,\cdot\right)\right)_n$ *mit* $\left(t_n\right)_n \subset \mathbb{R}^+$ *und* $t_n \to \infty$ *für* $n \to \infty$ *gegen* $\bar{\theta}_*$.

Beweis: Sei

$$K(t) := \int_0^1 e(q,\theta)(t,x)\,\mathrm{d}x - \int_0^t \int_0^1 r \cdot \frac{c_0(\theta)}{c_0(\bar{\theta})}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.$$

Für K gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{e_0(\theta) + a(\theta)q^2\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 r \cdot \frac{c_0(\theta)}{c_0(\bar{\theta})}(t,x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 q_x(t,x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Hierbei wurden für die zweite Gleichheit die Gleichung (2.12) und für die dritte die Randbedingungen verwendet. Gleichung (2.68) zeigt, dass K konstant ist, d.h. dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$K(t) = K(0) = \int_0^1 \left\{e_0\left(\theta_0\right) + a\left(\theta_0\right) q_0^2\right\}(x)\,\mathrm{d}x$$

Sei nun $\left(t_n\right)_n \subset \mathbb{R}^+$ eine Folge mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$.
Wegen (2.21) ist die Menge $\left\{y \in \mathbb{R}^+ : y = \theta(t,x) \quad \text{für} \quad (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times J\right\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt, so dass die Folge $\left(\theta\left(t_n,0\right)\right)_n$ eine konvergente Teilfolge besitzt, die ebenfalls $\left(\theta\left(t_n,0\right)\right)_n$ genannt wird.
Sei $\bar{\theta}_* > 0$ der Grenzwert dieser Folge.
Mit Behauptung 2.10 und dem schon bewiesenen Konvergenzverhalten von q folgt daraus, dass $(q(t_n,\cdot),\theta(t_n,\cdot))$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in J gegen $\left(0,\bar{\theta}_*\right)$ konvergiert.
Gilt nun $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^1 r(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = 0$, so gilt aufgrund der Stetigkeit von c_0 und der Beschränktheit von θ auch

$$\begin{aligned} &\left|\lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^1 r \cdot \frac{c_0(\theta)}{c_0(\bar{\theta})}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \sup_{(s,x)\in\mathbb{R}_0^+\times J} \frac{c_0\left(\theta(s,x)\right)}{c_0\left(\bar{\theta}\right)} \cdot \left|\lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^1 r(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\{ e_0\left(\theta_0\right) + a\left(\theta_0\right) q_0^2 \right\}(x)\,\mathrm{d}x = K(0) = \lim_{n\to\infty} K(t_n) \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \left\{ e_0(\theta(t_n,x)) + a(\theta(t_n,x)) q^2(t_n,x) \right\}\,\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} \int_0^1 r \cdot \frac{c_0(\theta)}{c_0(\bar{\theta})}(s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \left\{ e_0(\bar{\theta}_*) + 0 \right\}\,\mathrm{d}x = e_0(\bar{\theta}_*).
\end{aligned}
$$

Wegen (0.4) ist $(e_0)' = c_0 > 0$. Die Funktion e_0 ist also streng monoton wachsend und somit injektiv. Es kann daher höchstens ein $\bar{\theta}_*$ geben, das (2.67) erfüllt.
Insbesondere ist damit auch gezeigt, dass $\bar{\theta}_*$ der einzige mögliche Grenzwert aller Folgen der Form $\left(\theta\left(t_n,\cdot\right)\right)_n$ mit $\left(t_n\right)_n \subset \mathbb{R}^+$ und $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$ ist. Da aber jede dieser Folgen aufgrund der Beschränktheit von θ und Behauptung 2.10 einen Häufungspunkt besitzt, ist die Behauptung 2.11 damit bewiesen. $\square$

Aus Behauptung 2.11 folgt direkt Eigenschaft (iii) in Satz 2.1 und Satz 2.2.
Beide Sätze sind damit bewiesen.

2.3 Ränder mit konstanter Temperatur

Wir untersuchen nun das Anfangsrandwertproblem (2.1)-(2.3) und (2.7) für ein $\bar{\theta} > 0$.

Satz 2.12
Es gelte (2.4),(2.5), $J = (0,1)$ und es seien $r \in H^2\left(\mathbb{R}_0^+ \times J\right)$ und

$$R_1(t) := |||r(t)|||_1^2 \quad \text{und} \quad R_2(t) := \|r(t)\|_{L^2(J)}^2 + \|r_t(t)\|_{L^2(J)}^2 + \|r_{tt}(t)\|_{L^2(J)}^2$$

für $t \leq 0$.
Dann findet man ein $\delta > 0$ und Konstanten $\beta, \gamma > 0$, so dass gilt:
Falls die Anfangsdaten (q_0, θ_0) die Bedingungen

$$q_0, \theta_0 \in H^2(J),$$

$$\theta_0(0) = \theta_0(1) = \bar{\theta},$$

$$\begin{aligned} & q_0'(0) - \frac{2a(\bar{\theta})}{\tau(\bar{\theta})} q_0(0)\left[q_0(0) + \chi(\bar{\theta})\theta_0'(0)\right] - r(0,0) \\ = \; & q_0'(1) - \frac{2a(\bar{\theta})}{\tau(\bar{\theta})} q_0(1)\left[q_0(1) + \chi(\bar{\theta})\theta_0'(1)\right] - r(0,1) = 0, \end{aligned}$$

und

$$\|q_0\|_{H^2}^2 + \left\|\theta_0 - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 + R_1(0) \leq \delta^2 \tag{2.69}$$

erfüllen und für die rechte Seite r

$$\sup_{t \geq 0} R_1(t) \leq \frac{1}{2}\delta^2 \qquad \text{und} \tag{2.70}$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\gamma(s-t)} R_2(s) \mathrm{d}s \leq \frac{1}{2}\delta^2 \tag{2.71}$$

gilt, besitzt das Anfangsrandwertproblem (2.1)-(2.3) und (2.7) eine eindeutige Lösung (q, θ) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $q, \theta \in X_2(\mathbb{R}_0^+, J)$

(ii) $\theta(t,x) > 0$ *für alle* $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times J$

(iii) *Für alle $t \geq 0$ gilt*

$$\begin{aligned} &\|q(t)\|_{H^2}^2 + \left\|\theta(t) - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 \\ \leq\ & \beta e^{-\gamma t} \left(\|q_0\|_{H^2}^2 + \left\|\theta_0 - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 + R_1(0)\right) + \beta e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma r} R_2(r)\, \mathrm{d}r + \beta R_1(t) \\ \leq\ & \beta e^{-\gamma t} \left(\|q_0\|_{H^2}^2 + \left\|\theta_0 - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 + R_1(0)\right) + \beta\delta. \end{aligned}$$

(iv) *Falls die rechte Seite r*

$$\lim_{t\to\infty} R_1(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{\gamma(s-t)} R_2(s) \mathrm{d}s = 0 \tag{2.72}$$

erfüllt, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} \left(\|q(t)\|_{H^2}^2 + \left\|\theta(t) - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2\right) = 0.$$

Außerdem konvergieren $q(t,\cdot)$, $q_t(t,\cdot)$, $q_x(t,\cdot)$, $\theta_t(t,\cdot)$ und $\theta_x(t,\cdot)$ gleichmäßig in J gegen 0 und $\theta(t,\cdot)$ konvergiert gleichmäßig in J gegen $\bar{\theta}$ für $t \to \infty$.

(v) *Falls es Konstanten $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ gibt, so dass die rechte Seite r*

$$R_1(t) \leq \beta_1 e^{-\gamma_1 t} \quad \text{und} \quad \int_0^t e^{\gamma(s-t)} R_2(s) \mathrm{d}s \leq \beta_2 e^{-\gamma_2 t} \tag{2.73}$$

erfüllt, gibt es ein $\gamma_0 > 0$ mit

$$\begin{aligned} &\|q(t)\|_{H^2}^2 + \left\|\theta(t) - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 \\ \leq\ & \beta e^{-\gamma_0 t} \left(\|q_0\|_{H^2}^2 + \left\|\theta_0 - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 + R_1(0) + \beta_1 + \beta_2\right). \end{aligned}$$

Der Gleichgewichtszustand $\left(0, \bar{\theta}\right)$ ist somit *stabil*, falls die rechte Seite klein genug ist.
Gilt für die rechte Seite zusätzlich (2.72), ist $\left(0, \bar{\theta}\right)$ *asymptotisch stabil* und, falls (2.73) erfüllt ist, sogar *exponentiell stabil*.
Insbesondere ist der Zustand $\left(0, \bar{\theta}\right)$ also für homogene Systeme exponentiell stabil.
Satz 2.12 wird in den folgenden vier Abschnitten, 2.3.1-2.3.4, bewiesen.

2.3.1 Transformation des Systems

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 2.2.1 konstruieren wir ein neues Anfangsrandwertproblem, das in einer Umgebung von $(0, \bar{\theta})$ zu (2.1)-(2.3) und (2.7) äquivalent ist. Auch dieses System wird die Voraussetzungen des Existenzsatzes 1.6 erfüllen, so dass wir eine eindeutige lokale Lösung mit gewünschter Regularität erhalten.
Wir teilen Gleichung (2.1) durch $\chi(\theta)$ und verwenden wie im vorherigen Abschnitt die Gleichung (2.10) als zweite Systemgleichung. Diese wird hier im Unterschied zur Transformation

in 2.2.1 nicht durch die Koeffizientenfunktion c_0 geteilt. Dadurch wird vermieden, dass die rechte Seite des neuen Systems von θ abhängt.
So erhalten wir als neues System

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\tau(\theta)}{\chi(\theta)}}_{\equiv \tilde{A}(\theta)} q_t + \underbrace{\frac{1}{\chi(\theta)}}_{\equiv \tilde{B}(\theta)} q + \theta_x &= 0 \\
q_x + \underbrace{\left(c_0(\theta) + a'(\theta) q^2\right)}_{\equiv \tilde{H}(q,\theta)} \theta_t + \underbrace{\frac{-2a(\theta)}{\tau(\theta)}}_{\equiv \tilde{F}(\theta)} q^2 + \underbrace{\frac{-2a(\theta)\chi(\theta)}{\tau(\theta)}}_{\equiv \tilde{E}(\theta)} q\theta_x &= r.
\end{aligned}$$

Es gelten auch hier aufgrund der Regularität der ursprünglichen Koeffizienten (2.4) und wegen (2.5) zu Satz 2.3 analoge Aussagen.

Satz 2.13
Es gibt ein $\bar{\varepsilon} \in (0, \bar{\theta})$ *und Funktionen* $A, B, E, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit:*

(i) $A, B, E, F \in C_b^2(\mathbb{R})$

(ii) $A(\psi) = \tilde{A}(\psi + \bar{\theta}), B(\psi) = \tilde{B}(\psi + \bar{\theta}), E(\psi) = \tilde{E}(\psi + \bar{\theta})$ *und* $F(\psi) = \tilde{F}(\psi + \bar{\theta})$ *für* $\psi \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$

(iii) $H \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$

(iv) $H(\eta, \psi) = \tilde{H}(\eta, \psi + \bar{\theta})$ *für* $\eta, \psi \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$

(v) *Es gibt* $\underline{A}$, $\underline{B}$ *und* $\underline{H} \in \mathbb{R}$ *mit* $A(\psi) \geq \underline{A} > 0$, $B(\psi) \geq \underline{B} > 0$ *und* $H(\eta, \psi) \geq \underline{H} > 0$ *für* $\psi, \eta \in \mathbb{R}$.

Mit solchen Funktionen A, B, E, F und H als neue Koeffizientenfunktionen und mit der Verschiebung

$$\varphi \equiv \theta - \bar{\theta}$$

ergibt sich hier als neues System:

$$A(\varphi) q_t + B(\varphi) q + \varphi_x = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{2.74}$$

$$q_x + H(q, \varphi)\varphi_t + E(\varphi) q \varphi_x + F(\varphi) q^2 = r \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times J, \tag{2.75}$$

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, 1) = 0 \quad \text{für} \quad t \geq 0, \tag{2.76}$$

$$q(0, x) = q_0(x), \quad \varphi(0, x) = \varphi_0(x) = \theta_0(x) - \bar{\theta} \quad \text{für} \quad x \in J \tag{2.77}$$

Bemerkung 2.4 gilt hier entsprechend, und zwar im homogenen und im inhomogenen Fall. Da wir auch für dieses System eine zu (2.20) analoge Aussage zeigen werden, können somit die Ergebnisse zu Lösungen von (2.74)-(2.77) auf die Lösungen zu (2.1)-(2.3) und (2.7) übertragen werden.

2.3.2 Lokale Lösung

Behauptung 2.14
Es gibt ein $T > 0$ so, dass die Anfangsrandwertaufgabe (2.74)-(2.77) in $[0, T]$ eine eindeutige Lösung $(q, \varphi) \in X^2([0, T], J)$ besitzt.

Beweis: Mit den Bezeichnungen

$$A^0(u) = \begin{pmatrix} A(u) & 0 \\ 0 & H(u) \end{pmatrix}, \quad A^1(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & E(u)q \end{pmatrix},$$
$$B(u) = \begin{pmatrix} B(u) & 0 \\ F(u)q & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kann der Beweis dieser Behauptung völlig analog zum Beweis der Behauptung 2.5 durchgeführt werden und wird deshalb nicht mehr vorgeführt. □

2.3.3 Globale Existenz

Wir werden zeigen, dass sich die nach Behauptung 2.14 existierende lokale Lösung $u \equiv (q, \varphi)$ zu (2.74)-(2.77) zu einer globalen Lösung fortsetzen läßt.
Dazu gehen wir, wie im Fall isolierter Ränder, davon aus, dass u schon auf ein maximales Existenzintervall $[0, T_0)$ fortgesetzt ist und somit in $X^2([0, T_0), J)$ liegt.
Wir werden zeigen, dass für gewisse Lösungen u die Norm $\|u(\cdot)\|_{H^2(J)}$ in $[0, T_0)$ beschränkt ist.
Die auf Seite 22 vorgeführte Argumentation gilt auch in diesem Fall und es folgt damit aus der Beschränktheit von u die globale Fortsetzbarkeit.

Wir definieren zu Lösungen u die *Energie* E durch

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ A \left(q^2 + q_t^2 + q_{tt}^2 \right) + H \left(\varphi^2 + \varphi_t^2 + \varphi_{tt}^2 \right) \right\} (t, x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{für} \quad t \in [0, T_0).$$

Unser erstes Ziel ist es, zu E ein *Lyapunov-Funktional* F zu finden[2], so dass gilt:

(i) Es gibt von u unabhängige Konstanten $k_1, k_2 > 0$ mit

$$k_1 E(t) \leq F(t) \leq k_2 E(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in [0, T_0).$$

[2]Dabei orientieren wir uns an [19].

(ii) Es gibt ein von u unabhängiges $\gamma > 0$ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) \leq -\gamma \cdot F(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in [0, T_0).$$

Für ein solches Funktional F gilt wegen (ii) und der Gronwallschen Ungleichung in Satz 1.4 die Abschätzung $F(t) \leq F(0) \cdot e^{-\gamma t}$ für $t \in [0, T_0)$. Mit (i) folgt daraus $E(t) \leq \frac{k_2}{k_1} E(0) \cdot e^{-\gamma t}$ für $t \in [0, T_0)$.
Mit Hilfe dieser Abschätzung wird es uns möglich sein, unter der Voraussetzung, dass die Anfangsdaten u_0 klein genug sind, die Beschränktheit der Lösung zu beweisen.
Wie in den Beweisen des vorherigen Abschnittes stehe Γ auch hier für unterschiedliche, allein von den Koeffizientenfunktionen und dem Intervall J abhängige, Konstanten.
Zur übersichtlicheren Darstellung sei

$$\alpha(t) := \sup_{x \in J} \left\{ |q(t)| + |q_t(t)| + |q_x(t)| + |\varphi(t)| + |\varphi_t(t)| + |\varphi_x(t)| \right\}.$$

Lemma 2.15
Es gibt eine Konstante $c_1 > 0$, so dass für alle $t \in [0, T_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^2} \leq 1$

$$\alpha(t) \leq c_1 \cdot \sqrt{\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t)}$$

gilt.

Beweis: Der Sobolevsche Einbettungssatz liefert ein von u unabhängiges $s_1 > 0$ mit

$$\alpha(t) \leq s_1 \|u(t)\|_{H^2} + \|q_t(t)\|_{C^0} + \|\varphi_t(t)\|_{C^0}.$$

Aus (2.74) bzw. (2.75) folgern wir wieder mit Sobolev

$$\|q_t(t)\|_{C^0} \leq \Gamma \left(\|q(t)\|_{C^0} + \|\varphi_x(t)\|_{C^0} \right) \leq s_2 \|u(t)\|_{H^2}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \|\varphi_t(t)\|_{C^0} &\leq \Gamma \left(\|q_x(t)\|_{C^0} + \|q\varphi_x(t)\|_{C^0} + \|q^2\|_{C^0} + \|r(t)\|_{C^0} \right) \\ &\leq s_3 \left(\|u(t)\|_{H^2} + \|u(t)\|_{H^2}^2 + \|r(t)\|_{H^1} \right). \end{aligned}$$

Unter der Voraussetztung $\|u(t)\|_{H^2} \leq 1$ ergeben diese drei Ungleichungen zusammen

$$\begin{aligned} \alpha(t) &\leq 2 \left(s_1 + s_2 + s_3 \right) \left(\|u(t)\|_{H^2} + \sqrt{R_1(t)} \right) \\ &\leq c_1 \sqrt{\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t)} \end{aligned}$$

für $c_1 := 4 \left(s_1 + s_2 + s_3 \right)$. Damit ist Lemma 2.15 gezeigt. □

Multiplikation von (2.74) und (2.75) mit q bzw. φ und Integration über J liefert wegen $u \in X_2([0,T_0),J) \subset C^1\left([0,T_0),L^2(J)\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 Aq^2\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 Bq^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{2}A_tq^2 - \varphi_x q\,\mathrm{d}x\\
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 H\varphi^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{2}H_t\varphi^2 - q_x\varphi - Eq\varphi_x\varphi - Fq^2\varphi\,\mathrm{d}x + \int_0^1 r\varphi\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichungen ergibt mit $\int_0^1 \varphi_x q + \varphi q_x\,\mathrm{d}x = [\varphi q]_{x=0}^{x=1} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 Aq^2 + H\varphi^2\,\mathrm{d}x = &-\int_0^1 Bq^2\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 A_tq^2 + H_t\varphi^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 Eq\varphi_x\varphi + Fq^2\varphi\,\mathrm{d}x + \int_0^1 r\varphi\,\mathrm{d}x\\
\le\ &-\int_0^1 Bq^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 r\varphi\,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\alpha(t)\cdot E(t),
\end{aligned}\tag{2.78}$$

wobei die Abschätzung (2.78) analog zu dem auf Seite 28 beschriebenen Vorgehen begründet werden kann.
Nun wird (2.74) und (2.75) nach t abgeleitet.

$$A_tq_t + Aq_{tt} + B_tq + Bq_t + \varphi_{xt} = 0 \tag{2.79}$$

$$q_{xt} + H_t\varphi_t + H\varphi_{tt} + E_tq\varphi_x + Eq_t\varphi_x + Eq\varphi_{xt} + F_tq^2 + 2Fqq_t = r_t \tag{2.80}$$

Wie oben liefert Multiplikation von (2.79) und (2.80) mit q_t bzw. φ_t, Addition der beiden Gleichungen und anschließende Integration über J wegen $\int_0^1 \varphi_{xt}q_t + \varphi_t q_{xt}\,\mathrm{d}x = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 Aq_t^2 + H\varphi_t^2\,\mathrm{d}x = &-\int_0^1 Bq_t^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 A_tq_t^2 + H_t\varphi_t^2 + B_tqq_t\,\mathrm{d}x\\
&-\int_0^1 E_tq\varphi_x\varphi_t + Eq_t\varphi_x\varphi_t + Eq\varphi_{xt}\varphi_t + F_tq^2\varphi_t + 2Fqq_t\varphi_t\,\mathrm{d}x + \int_0^1 r_t\varphi_t\,\mathrm{d}x\\
\le &-\int_0^1 Bq_t^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 r_t\varphi_t - Eq\varphi_{xt}\varphi_t\,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\left(\alpha(t) + \alpha^2(t)\right)\cdot E(t).
\end{aligned}\tag{2.81}$$

Zur Abschätzung von $\int_0^1 Eq\varphi_{xt}\varphi_t\,\mathrm{d}x$ benötigen wir eine Abschätzung für $\int_0^1 \varphi_{xt}^2\,\mathrm{d}x$. Dazu lösen wir (2.79) nach φ_{xt} auf, erhalten mit (2.32)

$$\varphi_{xt}^2 \le \Gamma\left(A^2q_{tt}^2 + B^2q_t^2 + (A_t)^2 q_t^2 + (B_t)^2 q^2\right)$$

und damit nach Integration über J

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi_{xt}^2 \,\mathrm{d}x &\leq K_1 \int_0^1 q_t^2 + q_{tt}^2 \,\mathrm{d}x + K_1\alpha^2(t) \int_0^1 q^2 + q_t^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq K_1 \left(1+\alpha^2(t)\right) \cdot E(t),\end{aligned} \tag{2.82}$$

für ein von u unabhängiges $K_1 > 0$. Mit dieser Abschätzung erhält man

$$\int_0^1 Eq\varphi_{xt}\varphi_t \,\mathrm{d}x \leq \Gamma\alpha(t) \int_0^1 \varphi_{xt}^2 + \varphi_t^2 \,\mathrm{d}x \leq \Gamma\left(\alpha(t) + \alpha^3(t)\right) \cdot E(t),$$

womit aus (2.81)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 Aq_t^2 + H\varphi_t^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq -\int_0^1 Bq_t^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 r_t\varphi_t \,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\left(\alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t)\right) \cdot E(t)\end{aligned} \tag{2.83}$$

folgt.

Behauptung 2.16

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 Aq_{tt}^2 + H\varphi_{tt}^2 \,\mathrm{d}x \\ = \ &-\int_0^1 Bq_{tt}^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 B_{tt}qq_{tt} + 2B_tq_tq_{tt} + A_{tt}q_tq_{tt} + H_{tt}\varphi_t\varphi_{tt} \,\mathrm{d}x \\ &-\frac{3}{2}\int_0^1 A_tq_{tt}^2 + H_t\varphi_{tt}^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{2}E_xq\varphi_{tt}^2 + \frac{1}{2}Eq_x\varphi_{tt}^2 \,\mathrm{d}x \\ &-\int_0^1 E_{tt}q\varphi_x\varphi_{tt} + 2E_tq_t\varphi_x\varphi_{tt} + 2E_tq\varphi_{xt}\varphi_{tt} + Eq_{tt}\varphi_x\varphi_{tt} + 2Eq_t\varphi_{xt}\varphi_{tt} \,\mathrm{d}x \\ &-\int_0^1 F_{tt}q^2\varphi_{tt} + 4F_tqq_t\varphi_{tt} + 2Fq_t^2\varphi_{tt} + 2Fqq_{tt}\varphi_{tt} \,\mathrm{d}x + \int_0^1 r_{tt}\varphi_{tt} \,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.84}$$

Beweisidee: Wären $q, \varphi \in X_3\left([0,T_0), J\right)$, so könnte man (2.84) analog zu (2.78) und (2.81) folgendermaßen zeigen:
Man leitet (2.74) und (2.75) zwei mal nach t ab, multipliziert die Gleichungen mit q_{tt} bzw. φ_{tt} und integriert beide Gleichungen anschließend über J.
So erhält man

$$\int_0^1 A_{tt}q_tq_{tt} + 2A_tq_{tt}^2 + Aq_{ttt}q_{tt} + B_{tt}qq_{tt} + 2B_tq_tq_{tt} + Bq_{tt}^2 + \varphi_{xtt}q_{tt} \,\mathrm{d}x = 0$$

und

$$\begin{aligned}&\int_0^1 q_{xtt}\varphi_{tt} + H\varphi_{ttt}\varphi_{tt} + 2H_t\varphi_{tt}^2 + H_{tt}\varphi_t\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x\\&\quad + \int_0^1 E_{tt}q\varphi_x\varphi_{tt} + 2E_tq_t\varphi_x\varphi_{tt} + 2E_tq\varphi_{xt}\varphi_{tt} + 2Eq_t\varphi_{xt}\varphi_{tt} + Eq_{tt}\varphi_x\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x\\&\quad + \int_0^1 Eq\varphi_{xtt}\varphi_{tt} + F_{tt}q^2\varphi_{tt} + 4F_tqq_t\varphi_{tt} + 2Fq_t^2\varphi_{tt} + 2Fqq_{tt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 r_{tt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^1 \varphi_{xtt}q_{tt} + q_{xtt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x = [\varphi_{tt}q_{tt}]_{x=0}^{x=1} = 0,$$

$$\int_0^1 Eq\varphi_{xtt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[Eq\varphi_{tt}^2\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 E_xq\varphi_{tt}^2 + Eq_x\varphi_{tt}^2\,\mathrm{d}x$$

und $[Eq\varphi_{tt}^2]_{x=0}^{x=1} = 0$ folgt (2.84) nach Addition der beiden Gleichungen.
Da aber die Regularität unserer Lösung für diese Rechnungen nicht ausreicht, müsste man auch hier, ähnlich wie auf Seite 36, mit einer Approximationsmethode argumentieren. Dies wird hier aber nicht vorgeführt. (□)

Aus (2.84) folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 Aq_{tt}^2 + H\varphi_{tt}^2\,\mathrm{d}x\\&\leq \; -\int_0^1 Bq_{tt}^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 r_{tt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\left(\alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t)\right)\cdot E(t)\end{aligned}$$

und zusammen mit (2.78) und (2.83) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) &\leq -\underline{B}\int_0^1 q^2 + q_t^2 + q_{tt}^2\,\mathrm{d}x\\&\quad + \int_0^1 r\varphi + r_t\varphi_t + r_{tt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\left(\alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t)\right)\cdot E(t).\end{aligned} \tag{2.85}$$

Der Zweck der nun folgenden Abschätzungen ist es, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E$ zusätzlich gegen eine Summe aus negativen Vielfachen der Terme $\int_0^1 \varphi^2\,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 \varphi_t^2\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^1 \varphi_{tt}^2\,\mathrm{d}x$ abzuschätzen.
Der Sobolevsche Einbettungssatz liefert $\varphi \in C^1(\bar{J})$. Wie man im Beweis der Poincaréschen Ungleichung[3] erkennt, reicht diese Regularität zusammen mit den Randbedingungen an φ aus, um für φ die Ungleichung

$$\int_0^1 \varphi^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \varphi_x^2\,\mathrm{d}x \tag{2.86}$$

zu beweisen.

[3] [8] Seite 26

Aus Gleichung (2.74) folgt mit (2.32)

$$\int_0^1 \varphi_x^2 \,\mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 A^2 q_t^2 + B^2 q^2 \,\mathrm{d}x \leq K_2 \int_0^1 q^2 + q_t^2 \,\mathrm{d}x, \tag{2.87}$$

für ein von u unabhängiges $K_2 > 0$. Wegen (2.86) gilt also

$$\int_0^1 \varphi^2 \,\mathrm{d}x \leq K_2 \int_0^1 q^2 + q_t^2 \,\mathrm{d}x. \tag{2.88}$$

Zur Abschätzung von $\int_0^1 \varphi_t^2 \,\mathrm{d}x$ multiplizieren wir (2.75) mit φ_t. Da $H \geq \underline{H} > 0$ ist, darf nach φ_t^2 aufgelöst werden und man erhält nach Integration über J

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_t^2 \,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \frac{1}{H}\left(q_x\varphi_t + Eq\varphi_x\varphi_t + Fq^2\varphi_t - r\varphi_t\right) \mathrm{d}x \\ &\leq -\int_0^1 \frac{1}{H} q_x\varphi_t \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\underline{H}}\int_0^1 |r\varphi_t| \,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\alpha(t)\cdot E(t). \end{aligned} \tag{2.89}$$

Der Term $\int_0^1 \frac{1}{H} q_x \varphi_t \,\mathrm{d}x$ stellt nun ein Problem dar, da er weder durch ein positives Vielfaches von $\int_0^1 q^2 + q_t^2 + q_{tt}^2 \,\mathrm{d}x$ noch durch $\Gamma\alpha(t)E(t)$ abgeschätzt werden kann. Es gilt aber mit partieller Integration unter Berücksichtigung der Randwerte und wegen $u \in C^1\left([0,T_0), H^1(J)\right)$

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \frac{1}{H} q_x\varphi_t \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{H} q\varphi_{xt} + \left(\frac{1}{H}\right)_x q\varphi_t \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{1}{H} q\varphi_x \,\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\frac{1}{H}\right)_t q\varphi_x + \frac{1}{H} q_t\varphi_x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\frac{1}{H}\right)_x q\varphi_t \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{1}{H} q\varphi_x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{H}\left(\varphi_x^2 + q_t^2\right) \mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\alpha(t)\cdot E(t) \\ &\overset{(2.87)}{\leq} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{1}{H} q\varphi_x \,\mathrm{d}x + K_3 \int_0^1 q^2 + q_t^2 \,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\alpha(t)\cdot E(t) \end{aligned} \tag{2.90}$$

für ein von u unabhängiges $K_3 > 0$, was eingesetzt in (2.89)

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \varphi_t^2 \,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{1}{H} q\varphi_x \,\mathrm{d}x \\ &\leq K_3 \int_0^1 q^2 + q_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\underline{H}}\int_0^1 |r\varphi_t| \,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\alpha(t)\cdot E(t) \end{aligned} \tag{2.91}$$

liefert.

Zur Abschätzung von $\int_0^1 \varphi_{tt}^2 \,\mathrm{d}x$ multiplizieren wir (2.80) mit φ_{tt} und können, wie oben, wegen $H \geq \underline{H} > 0$ nach φ_{tt}^2 auflösen. Wir integrieren über J und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_{tt}^2 \,\mathrm{d}x \quad &= \quad -\int_0^1 \frac{1}{H}\left(q_{xt}\varphi_{tt} + H_t\varphi_t\varphi_{tt} + Eq\varphi_{xt}\varphi_{tt} + Eq_t\varphi_x\varphi_{tt}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad\; -\int_0^1 \frac{1}{H}\Big(E_tq\varphi_x\varphi_{tt} + 2Fqq_t\varphi_{tt} + F_tq^2\varphi_{tt} - r_t\varphi_{tt}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(2.82)}{\leq} \quad -\int_0^1 \frac{1}{H}q_{xt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\underline{H}}\int_0^1 |r_t\varphi_{tt}|\,\mathrm{d}x + \Gamma\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)\right)\cdot E(t).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Auf analoge Weise wie der Term $\int_0^1 \frac{1}{H}q_x\varphi_t\,\mathrm{d}x$ wird auch $\int_0^1 \frac{1}{H}q_{xt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x$ behandelt. Formal erhält man nach ähnlichen Umformungen wie in (2.90)

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \frac{1}{H}q_{xt}\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x \;&\leq\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{1}{H}q_t\varphi_{xt}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{H}\left(\varphi_{tx}^2 + q_{tt}^2\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \;\Gamma\left(\alpha(t)+\alpha^3(t)\right)\cdot E(t) \\
&\leq\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{1}{H}q_t\varphi_{xt}\,\mathrm{d}x + K_4\int_0^1 q^2 + q_t^2 + q_{tt}^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \;\Gamma\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)\right)\cdot E(t)
\end{aligned} \tag{2.93}$$

für ein von u unabhängiges $K_4 > 0$.
Auch hier muss darauf hingewiesen werden, dass in Zwischenschritten der obigen Rechnung „nichtexistierende“ dritte Ableitungen von φ auftreten, so dass die Abschätzung (2.93) eigentlich mit einem Approximationsargument begründet werden müsste.
Wir setzen (2.93) in (2.92) ein, was uns zusammen mit (2.88) und (2.91)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \varphi^2 + \varphi_t^2 + \varphi_{tt}^2\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{1}{H}\left(q\varphi_x + q_t\varphi_{xt}\right)\mathrm{d}x \leq K_5\int_0^1 q^2 + q_t^2 + q_{tt}^2\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \frac{1}{\underline{H}}\int_0^1 |r\varphi_t| + |r_t\varphi_{tt}|\,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)\right)\cdot E(t)
\end{aligned} \tag{2.94}$$

für $K_5 := \max\{1, K_1, K_2, K_3, K_4\} > 0$ ergibt.
(2.85) und (2.94) zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\varepsilon}E(t) - \int_0^1 \frac{1}{H}\left(q\varphi_x + q_t\varphi_{xt}\right)\mathrm{d}x\right) \leq -\left(\frac{\underline{B}}{\varepsilon} - K_5\right)\int_0^1 q^2 + q_t^2 + q_{tt}^2\,\mathrm{d}x \\
&\qquad -\int_0^1 \varphi^2 + \varphi_t^2 + \varphi_{tt}^2\,\mathrm{d}x \quad + \quad \Gamma\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)\right)\cdot E(t) \\
&\qquad + \frac{1}{\underline{H}}\int_0^1 |r\varphi_t| + |r_t\varphi_{tt}|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 |r\varphi| + |r_t\varphi_t| + |r_{tt}\varphi_{tt}|\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{2.95}$$

gilt.

Wir definieren

$$G(t) := -\int_0^1 \left\{ \frac{1}{H}\left(q\varphi_x + q_t\varphi_{xt}\right)\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \quad t \in [0, T_0)$$

und wählen ε so klein, dass

$$\frac{\underline{B}}{\varepsilon} - K_5 > 0$$

gilt. Für spätere Zwecke fordern wir ohne Einschränkung zusätzlich

$$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{K_5(3+c_1^2)}{2\underline{H}} > 0 \qquad \text{mit} \quad c_1 > 0 \quad \text{aus Lemma 2.15.} \tag{2.96}$$

Zusammengefaßt gilt also

$$\varepsilon < \min\left\{ \frac{\underline{B}}{K_5}, \frac{2\underline{H}}{K_5(3+c_1^2)} \right\}.$$

Zu diesem, nun fest gewählten ε, sei

$$F(t) := \frac{1}{\varepsilon}E(t) + G(t) \qquad \text{für} \quad t \in [0, T_0)$$

und $K := \min\left\{ \frac{2(\frac{\underline{B}}{\varepsilon} - K_5)}{\overline{A}}, \frac{2}{\overline{H}} \right\}$, wobei $\overline{A} := \sup_{s\in\mathbb{R}} A(s)$ und $\overline{H} := \sup_{s\in\mathbb{R}} H(s)$ seien. Dann ist $K > 0$ und wir erhalten aus (2.95)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) \quad \leq \quad & -\frac{K}{2}\int_0^1 \overline{A}\left(q^2 + q_t^2 + q_{tt}^2\right)\,\mathrm{d}x - \frac{K}{2}\int_0^1 \overline{H}\left(\varphi^2 + \varphi_t^2 + \varphi_{tt}^2\right)\,\mathrm{d}x \\ & + \frac{1}{\underline{H}}\int_0^1 |r\varphi_t| + |r_t\varphi_{tt}|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 |r\varphi| + |r_t\varphi_t| + |r_{tt}\varphi_{tt}|\,\mathrm{d}x \\ & + \quad \Gamma\left(\alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t)\right)\cdot E(t). \end{aligned} \tag{2.97}$$

Mit der Bezeichnung $c_2 := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\underline{H}} + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ und der Ungleichung (2.47) gilt für alle $\rho > 0$

$$\frac{1}{\underline{H}}\int_0^1 |r\varphi_t| + |r_t\varphi_{tt}|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 |r\varphi| + |r_t\varphi_t| + |r_{tt}\varphi_{tt}|\,\mathrm{d}x \leq \frac{c_2}{\rho}R_2(t) + \rho c_2 E(t).$$

Aus (2.97) folgt damit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) \quad & \leq \quad -\frac{K}{2}\int_0^1 \left\{A\left(q^2 + q_t^2 + q_{tt}^2\right) + H\left(\varphi^2 + \varphi_t^2 + \varphi_{tt}^2\right)\right\}(t,x)\,\mathrm{d}x \\ & \quad + \quad \Gamma\left(\alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t)\right)\cdot E(t) + \rho c_2 E(t) + \frac{c_2}{\rho}R_2(t) \\ & \leq \quad -K\cdot E(t) + \Gamma\left(\alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t)\right)\cdot E(t) + \rho c_2 E(t) + \frac{c_2}{\rho}R_2(t). \end{aligned} \tag{2.98}$$

Lemma 2.17
Es gibt Konstanten $c_3, c_4 > 0$, so dass für alle $t \in [0, T_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t) \leq 1$

$$c_3 \cdot E(t) \leq F(t) \leq c_4 \cdot E(t)$$

gilt.

Beweis: Mit den Abschätzungen (2.82), (2.87) und Lemma 2.15 erhält man

$$\begin{aligned} F(t) &\leq \frac{1}{\varepsilon} E(t) + |G(t)| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} E(t) + \frac{1}{2\underline{H}} \int_0^1 q^2 + \varphi_x^2 + q_t^2 + \varphi_{xt}^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} E(t) + \frac{1}{2\underline{H}} \big(E(t) + (K_2 + K_1) E(t) + K_1 \alpha^2(t) E(t) \big) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} E(t) + \frac{K_5(3 + c_1^2)}{2\underline{H}} \cdot E(t) \\ &\leq c_4 E(t) \qquad \text{für} \quad c_4 := \frac{1}{\varepsilon} + \frac{K_5(3 + c_1^2)}{2\underline{H}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(t) &\geq \frac{1}{\varepsilon} E(t) - |G(t)| \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} E(t) - \frac{K_5(3 + c_1^2)}{2\underline{H}} \cdot E(t) \\ &\geq c_3 E(t) \qquad \text{für} \quad c_3 := \frac{1}{\varepsilon} - \frac{K_5(3 + c_1^2)}{2\underline{H}}. \end{aligned}$$

Wegen Forderung (2.96) ist $c_3 > 0$. □

Für alle $t \in [0, T_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t) \leq 1$ folgt mit Lemma 2.15 und Lemma 2.17 aus (2.98)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) &\leq -K \cdot E(t) + c_5 \sqrt{\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t)} \cdot E(t) + \rho c_2 E(t) + \frac{c_2}{\rho} R_2(t) \\ &\leq -\frac{K}{c_4} \cdot F(t) + \frac{c_5}{c_3} \sqrt{\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t)} \cdot F(t) + \frac{\rho c_2}{c_3} \cdot F(t) + \frac{c_2}{\rho} R_2(t) \end{aligned} \tag{2.99}$$

für $c_5 := \Gamma \cdot 3 \max\{c_1, c_1^3\}$.
Seien nun ρ und $\delta_0 > 0$ so klein, dass

$$\frac{\rho c_2}{c_3} = \frac{1}{4} \frac{K}{c_4} \quad \text{und} \quad \frac{c_5}{c_3} \cdot \delta_0 \leq \frac{1}{4} \frac{K}{c_4},$$

also $\rho = \frac{c_3}{4 c_2 c_4} K$ und $\delta_0 \leq \frac{c_3}{4 c_4 c_5} K$ gilt.
Ohne Einschränkung gelte außerdem $4\delta_0^2 < 1$.

Dann folgt aus (2.99) nach Wahl von δ_0 und ρ das folgende

Ergebnis 2.18
Für alle $t \in [0, T_0)$ *mit* $\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t) \leq 4\delta_0^2$ *gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) \leq -\underbrace{\frac{1}{4}\frac{K}{c_4}}_{=:\gamma} \cdot F(t) + \underbrace{\frac{4c_2^2 c_4}{c_3 K}}_{=:c_6} \cdot R_2(t).$$

Lemma 2.19
Es gibt ein von u_0 *unabhängiges* $\beta > 0$*, so dass für alle* $t \in [0, T_0)$ *mit*

$$\|u(s)\|_{H^2}^2 + R_1(s) \leq 4\delta_0^2 \qquad \text{für alle} \quad s \in [0, t] \tag{2.100}$$

die Abschätzung

$$\|u(t)\|_{H^2}^2 \leq \beta e^{-\gamma t} \left(\|u(0)\|_{H^2}^2 + R_1(0)\right) + \beta R_1(t) + \beta e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r. \tag{2.101}$$

gilt.

Es ist zu bemerken, dass die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t)$ wegen $u \in X^2([0, T_0), J)$ und $r \in H^2([0, T_0) \times J) \subset X^1([0, T_0), J)$ stetig in $[0, T_0)$ ist und es deshalb zu allen Anfangsdaten, für die $\|u_0\|_{H^2}^2 + R_1(0)$ klein genug ist, ein $t \in [0, T_0)$ gibt, das (2.100) erfüllt.

Beweis: Sei $t \in [0, T_0)$ so, dass (2.100) für die Lösung u erfüllt ist.
Dann genügt F wegen Ergebnis 2.18 in $[0, t]$ den Voraussetzungen von Satz 1.4, der uns die Abschätzung

$$F(s) \leq e^{-\gamma s} \cdot \left(F(0) + c_6 \int_0^s e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r\right) \qquad \text{für alle} \quad s \in [0, t]$$

liefert. Mit Lemma 2.17 folgt daraus

$$c_3 E(t) \leq e^{-\gamma t} \cdot \left(c_4 E(0) + c_6 \int_0^t e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r\right). \tag{2.102}$$

Wir benötigen nun das folgende Lemma, das in Anhang A bewiesen wird.

Lemma 2.20
Es gibt Konstanten $c_7, c_8, c_9 > 0$*, so dass für alle* $t \in [0, T_0)$ *mit* $\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t) \leq 1$

(i) $c_7 E(t) \leq |||u(t)|||_2^2 \leq c_8 \left(E(t) + R_1(t)\right)$ *und*

(ii) $\|u(t)\|_{H^2}^2 \leq |||u(t)|||_2^2 \leq c_9 \left(\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t)\right)$

gilt.

Da $\|u(\cdot)\|_{H^2}^2 + R_1 \leq 4\delta_0^2 < 1$ in $[0,t]$ gilt, gelten die Abschätzungen aus Lemma 2.20 und wir erhalten damit aus (2.102) nacheinander

$$\frac{c_3}{c_8}|||u(t)|||_2^2 - c_3 R_1(t) \leq e^{-\gamma t} \cdot \left(\frac{c_4}{c_7}|||u(0)|||_2^2 + c_6 \int_0^t e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r \right)$$

und

$$\frac{c_3}{c_8}\|u(t)\|_{H^2}^2 - c_3 R_1(t) \leq e^{-\gamma t} \cdot \left(\frac{c_4 c_9}{c_7} \left(\|u(0)\|_{H^2}^2 + R_1(0) \right) + c_6 \int_0^t e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r \right).$$

Hieraus folgt schließlich

$$\|u(t)\|_{H^2}^2 \leq e^{-\gamma t} \cdot \left(\frac{c_4 c_8 c_9}{c_3 c_7} \left(\|u(0)\|_{H^2}^2 + R_1(0) \right) + \frac{c_6 c_8}{c_3} \int_0^t e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r \right) + c_8 R_1(t).$$

Mit $\beta := \max\left\{ \frac{c_4 c_8 c_9}{c_3 c_7}, \frac{c_6 c_8}{c_3}, c_8 \right\}$ ist Lemma 2.19 bewiesen. □

Wir zeigen nun, dass für Lösungen u zu kleinen Anfangsdaten u_0 die Abschätzung (2.101) im gesamten Existenzintervall gilt.
Dazu genügt es laut Lemma 2.19 zu zeigen, dass $\|u(\cdot)\|_{H^2}^2 + R_1 \leq 4\delta_0^2$ in ganz $[0, T_0)$ gilt.

Lemma 2.21

Falls die Vorausetzungen (2.69),(2.70) und (2.71) in Satz 2.12 für

$$\delta := \min\left\{ \delta_0, \frac{\delta_0}{\sqrt{\beta}} \right\}$$

erfüllt sind, so gilt

$$\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t) \leq 4\delta_0^2$$

für alle $t \in [0, T_0)$.

Beweis: Es gelte $u_0 \in H^2(J)$, $\|u_0\|_{H^2}^2 + R_1(0) \leq \delta^2$ und es sei $u \in X_2([0,T_0), J)$ die zugehörige Lösung.

Annahme: Es gibt ein $t_1 \in (0, T_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t) > 4\delta_0^2$.

Die Stetigkeit der Funktion $t \mapsto \|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t)$ liefert mit Hilfe des Zwischenwertsatzes ein minimales $t_2 \in (0, t_1)$ mit $\|u(t_2)\|_{H^2}^2 + R_1(t_2) = 4\delta_0^2$.
Somit ist $\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t) \leq 4\delta_0^2$ für alle $t \in [0, t_2]$, so dass mit Lemma 2.19 für t_2 die Abschätzung (2.101) gilt.

Mit den Vorausetzungen (2.69),(2.70) und (2.71) in Satz 2.12 gilt insbesondere

$$\begin{aligned}\|u(t_2)\|_{H^2}^2 &\leq \beta e^{-\gamma t_2}\left(\|u(0)\|_{H^2}^2 + R_1(0)\right) + \beta R_1(t_2) + \beta e^{-\gamma t_2}\int_0^{t_2} e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r \\ &\leq \beta\delta^2 \cdot e^{-\gamma t_2} + \beta\delta^2.\end{aligned}$$

Voraussetzung (2.70) in Satz 2.12 liefert außerdem

$$R_1(t_2) \leq \frac{1}{2}\delta^2 \leq \frac{1}{2}\delta_0^2$$

und somit $\|u(t_2)\|_{H^2}^2 + R_1(t_2) < 3\delta_0^2$, was im Widerspruch zu $\|u(t_2)\|_{H^2}^2 + R_1(t_2) = 4\delta_0^2$ steht und damit Lemma 2.21 beweist.

□

Sei δ nun wie in Lemma 2.21 definiert und $u_0 \in H^2(J)$ so, dass $\|u_0\|_{H^2}^2 + R_1(0) \leq \delta^2$ gilt. Dann besagt Lemma 2.21 insbesondere, dass die H^2-Norm der zugehörigen Lösung u von (2.74)-(2.77) in $[0, T_0)$ beschränkt ist, was, wie auf Seite 22 beschrieben, die globale Existenz der Lösung $u \in X_2\left(\mathbb{R}_0^+, J\right)$ liefert.
Es gelte nun ohne Einschränkung zusätzlich $2\delta^2 < \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4\beta\cdot s^2}$, wobei s, wie auf Seite 38, für die passende *Sobolevkonstante* stehe. Dann gilt für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{C^0}^2 &\leq s^2 \cdot \|u(t)\|_{H^2}^2 \\ &\leq s^2\beta e^{-\gamma t}\left(\|u(0)\|_{H^2}^2 + R_1(0)\right) + s^2\beta R_1(t) + s^2\beta e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r \\ &\leq 2s^2\beta\delta^2 < \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}. \qquad (2.103)\end{aligned}$$

Damit ist das zu $u = (q, \varphi)$ gehörende Paar $(q, \theta) = (q, \varphi + \bar{\theta})$ eine globale Lösung zu (2.1)-(2.3) und (2.7) und besitzt die in Satz 2.12 (i) geforderte Regularität.
Aus (2.101) folgt für (q, θ)

$$\begin{aligned}&\|q(t)\|_{H^2}^2 + \left\|\theta(t) - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 \\ &\leq \beta e^{-\gamma t}\left(\|q_0\|_{H^2}^2 + \left\|\theta_0 - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 + R_1(0)\right) + \beta R_1(t) + \beta e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma r} R_2(r)\,\mathrm{d}r \qquad (2.104) \\ &\leq \beta e^{-\gamma t}\left(\|q_0\|_{H^2}^2 + \left\|\theta_0 - \bar{\theta}\right\|_{H^2}^2 + R_1(0)\right) + \beta\delta^2,\end{aligned}$$

also Eigenschaft (iii) in Satz 2.12.
Eigenschaft (ii) folgt aus (2.103) und $\bar{\varepsilon} \in \left(0, \bar{\theta}\right)$.

2.3.4 Konvergenzverhalten der Lösung

Der Sobolevsche Einbettungssatz liefert ein $s > 0$, so dass

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in J}\left\{q^2(t,x)+q_t^2(t,x)+q_x^2(t,x)+(\theta(t,x)-\bar\theta)^2+\theta_t^2(t,x)+\theta_x^2(t,x)\right\}\\&\quad\le s^2\left(\|q(t)\|_{H^2}^2+\left\|\theta(t)-\bar\theta\right\|_{H^2}^2\right)\end{aligned}$$

gilt.
Falls nun (2.72) erfüllt ist, folgt damit aus (2.104)

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in J}\left\{q^2(t,x)+q_t^2(t,x)+q_x^2(t,x)+(\theta(t,x)-\bar\theta)^2+\theta_t^2(t,x)+\theta_x^2(t,x)\right\}\\
\le\;& s^2\cdot\lim_{t\to\infty}\left(\|q(t)\|_{H^2}^2+\left\|\theta(t)-\bar\theta\right\|_{H^2}^2\right)\\
\le\;& s^2\cdot\lim_{t\to\infty}\left(\beta e^{-\gamma t}\left(\|q_0\|_{H^2}^2+\left\|\theta_0-\bar\theta\right\|_{H^2}^2+R_1(0)\right)+\beta R_1(t)+\beta e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma r}R_2(r)\,\mathrm{d}r\right)\\
=\;& 0,\end{aligned}$$

womit Eigenschaft (iv) gezeigt ist.
Unter der Voraussetzung, dass (2.73) gilt, folgt aus (2.104)

$$\begin{aligned}&\|q(t)\|_{H^2}^2+\left\|\theta(t)-\bar\theta\right\|_{H^2}^2\\
&\quad\le\;\beta e^{-\gamma t}\left(\|q_0\|_{H^2}^2+\left\|\theta_0-\bar\theta\right\|_{H^2}^2+R_1(0)\right)+\beta\cdot\beta_1 e^{-\gamma_1 t}+\beta\cdot\beta_2 e^{-\gamma_2 t}\\
&\quad\le\;\beta e^{-\gamma_0 t}\left(\|q_0\|_{H^2}^2+\left\|\theta_0-\bar\theta\right\|_{H^2}^2+R_1(0)+\beta_1+\beta_2\right)\end{aligned}$$

für $\gamma_0 := \min\{\gamma,\gamma_1,\gamma_2\}$.
Damit ist Eigenschaft (v) gezeigt und Satz 2.12 bewiesen.

Kapitel 3

Lokaler Existenzsatz für nichtlineare symmetrisch-hyperbolische Systeme in beschränkten Gebieten

In diesem Kapitel wird der in Satz 1.6 formulierte lokale Existenzsatz für nichtlineare symmetrisch-hyperbolische Systeme in beschränkten Gebieten bewiesen.
Der Beweis ist, wie schon erwähnt, [16], Appendix A, entnommen. Es werden hier allerdings einige Beweisschritte, die in [16] zwar beschrieben, aber nicht durchgeführt werden, ausführlich vorgeführt.
Dabei gehen wir folgendermaßen vor:
In Abschnitt 3.1 wird die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung zu linearen Systemen, die (1.1)-(1.3) entsprechen, gezeigt.
Für diese lokalen Lösungen beweisen wir einige Abschätzungen, die stetig von den Systemeigenschaften der jeweiligen Systeme abhängen.
Mit Hilfe dieser Abschätzungen können wir anschließend zeigen, dass die Abbildung $v \mapsto u$, wobei u die eindeutige Lösung zur linearen Anfangsrandwertaufgabe $L(v)u = F$, $u(0, \cdot) = f$ und $Mu = 0$ in $\partial\Omega$ sei, auf einem eingeschränkten Definitionsbereich eine Kontraktion bezüglich der $C^0([0, T], L^2)$-Norm ist. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert uns unter diesen Voraussetzungen eine eindeutige Funktion u, die die Gleichung $L(u)u = F$ erfüllt und somit die Lösung zu (1.1)-(1.3) ist.
Da wir für diese Lösung u zeigen können, dass sie die in Satz 1.6 geforderte Regularität besitzt, ist der Existenzsatz damit bewiesen.

3.1 Existenzsatz für lineare Systeme

Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.
Wir betrachten lineare Operatoren der Form

$$L(t,x) \equiv A^0(t,x)\partial_t + A^j(t,x)\partial_j + B(t,x) \qquad \text{für} \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega$$

und dazu für Funktionen $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ Systeme der Form

$$L(t,x)u(t,x) = F(t,x) \qquad \text{für} \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \tag{3.1}$$

$$u(0,x) = f(x) \qquad \text{für} \quad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$M(x)u(t,x) = 0 \qquad \text{für} \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega. \tag{3.3}$$

Falls das System (3.1)-(3.3) gewisse Bedingungen erfüllt, können wir die lokale Existenz einer eindeutigen Lösung zeigen. Zur Formulierung des Existenzsatzes werden wir die in Abschnitt 1.3 eingeführten Bezeichnungen verwenden. Zur Beschreibung der Kompatibilitätsbedingungen benötigen wir insbesondere die auf Seite 11 eingeführten $'\partial_t^p u(0,\cdot)'$.
Diese kann man im Falle eines linearen Systems für $0 \le p \le m$ induktiv durch

$$f^0 :=' \partial_t^0 u(0,\cdot)' = f,$$

$$\begin{aligned} f^p :=' \partial_t^p u(0,\cdot)' &= \left[\partial_t^{p-1}\left((A^0)^{-1}F\right) - \partial_t^{p-1}\left((A^0)^{-1}\left(A^j\partial_j - B\right)('u')\right)\right]_{|\{t=0\}\times\Omega} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\left[\left(\partial_t^{p-1-k}(A^0)^{-1}\right)\partial_t^k F\right]_{|\{t=0\}\times\Omega} \\ &\quad -\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\left[\partial_t^{p-1-k}\left((A^0)^{-1}\left(A^j\partial_j - B\right)\right)\right]_{|\{t=0\}\times\Omega} f^k \end{aligned}$$

darstellen. In diesem Zusammenhang schreiben wir jeweils f^p anstelle von $'\partial_t^p u(0,\cdot)'$.

Sei $A = (a_{ij})$ eine matrixwertige Funktion. Dann bedeute $A \in X_k$, dass $a_{ij} \in X_k$ für alle i,j gilt.
Für $A \in X_k$ ist durch $|||A|||_k := \max_{i,j} |||a_{ij}|||_k$ eine Norm auf X_k definiert.
Wir werden oft die abkürzenden Schreibweisen

$$|||A^j|||_k := \sum_{j=1}^{n} |||A^j|||_k \quad \text{und} \quad |||A^0, A^j, B|||_k := |||A^0|||_k + \sum_{j=1}^{n} |||A^j|||_k + |||B|||_k$$

verwenden.
Im Beweis werden wir auch mit der Norm $|||\cdot|||_{k,tan}$ arbeiten.

Für Funktionen aus $X_k([0,T],\Omega)$ wird $|||\cdot|||_{k,tan}$ analog zu $|||\cdot|||_k$ definiert mit dem Unterschied, dass in einer Umgebung von $\partial\Omega$ nur die Tangentialanteile der Ableitungen aufsummiert werden. Eine genaue Definition dieser Norm wird im Beweis folgen.
Mit diesen Bezeichnungen kann nun ein lokaler Existenzsatz für lineare Systeme der Form (3.1)-(3.3) formuliert werden.

Satz 3.1
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ und es gelte:

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ist ein offenes, beschränktes Gebiet, das für alle* $r \in \mathbb{N}$ *die gleichmäßige* C^r*-Regularitätseigenschaft besitzt.*

(ii) $F \in H^m([0,T] \times \Omega)$ *und* $f \in H^m(\Omega)$.

(iii) $M \in C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$.

(iv) *Für* $s := \max\left\{m, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2\right\}$ *sind* $A^0, A^j, B \in X_s([0,T],\Omega)$.

(v) A^0 *und die* A^j *sind symmetrisch.*

(vi) *Es gibt ein* $c_{A^0} > 0$*, so dass für alle* $h \in \mathbb{R}^l$ *gilt:*

$$h^T A^0 h \geq c_{A^0}|h|^2 \qquad \text{in} \quad [0,T] \times \Omega.$$

(vii) *Die Randmatrix* A^ν *ist regulär in* $[0,T] \times \partial\Omega$ *und es gibt ein* $c_{A^\nu} > 0$*, so dass für alle* $(t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega$ *gilt:*

$$\|(A^\nu(t,x))^{-1}\|_{op} \leq c_{A^\nu}.$$

(viii) *Die Randbedingung* $Mu = 0$ *ist maximal nichtnegativ.*

(ix) $Mf^p = 0$ *in* $\partial\Omega$ *für* $0 \leq p \leq m-1$.

Dann besitzt die Anfangsrandwertaufgabe (3.1)-(3.3) eine eindeutige Lösung $u \in X_m([0,T],\Omega)$.

Satz 3.2
Für die Lösung $u \in X_m([0,T],\Omega)$ *zu (3.1)-(3.3) gelten die folgenden Abschätzungen:*
Es gibt Konstanten d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, $d_7 > 0$*, die von* L, M, Ω *und* m *abhängen und ein* $0 < a = a(m,n) < 1$*, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} & |||u(t)|||_{m-1}^2 + |||u(t)|||_{m,tan}^2 \\ \leq\ & d_1 e^{d_2 t} \cdot \left(|||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2 + d_3 \int_0^t e^{-d_2\tau} |||F(\tau)|||_m^2 \,\mathrm{d}\tau \right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

und

$$|||u(t)|||_m \leq d_4 \left(1 + |||A^0, A^j|||_{s,T}^a\right) \cdot \left(|||u(t)|||_{m-1} + |||u(t)|||_{m,tan} + |||F(t)|||_{m-1}\right). \tag{3.5}$$

Unter der Voraussetzung $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3$ *gilt:*

$$\begin{aligned} |||u(t)|||_{m,tan}^2 \leq d_1 e^{d_5 t} \cdot \left(|||u(0)|||_{m,tan}^2 + d_6 \int_0^t e^{-d_5\tau} |||F(\tau)|||_m^2 \,\mathrm{d}\tau\right) \\ + d_6 d_1 e^{d_5 t} \cdot |||u|||_{m-1,T}^2 \int_0^t |||A^0(\tau), A^j(\tau), B(\tau)|||_m^2 \,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{3.6}$$

und

$$|||u(t)|||_m \leq d_7 \cdot \left(|||u(t)|||_{m-1} + |||u(t)|||_{m,tan} + |||F(t)|||_{m-1}\right). \tag{3.7}$$

Die Konstanten d_i *hängen von* L *über die folgenden Systemeigenschaften ab:*

$$\begin{aligned} d_1 &= d_1\left(\frac{1}{c_{A^0}}, |||A^0, A^j|||_{s-1,T}\right), \\ d_2 &= d_2\left(\frac{1}{c_{A^0}}, c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{s,T}\right), \\ d_3 &= d_3\left(c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{s,T}\right), \\ d_4 &= d_4\left(c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{s-1,T}\right), \\ d_5 &= d_5\left(\frac{1}{c_{A^0}}, c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{m-1,T}\right), \\ d_6 &= d_6\left(c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{m-1,T}\right) \qquad \textit{und} \\ d_7 &= d_7\left(c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{m-1,T}\right). \end{aligned}$$

Hierbei sind die Abhängigkeiten jeweils stetig und monoton wachsend.

Die Beweise zu Satz 3.1 und Satz 3.2 werden parallel durchgeführt, wobei wir im ersten Teil des Beweises zusätzlich voraussetzen, dass L glatt ist.
Im zweiten Teil wird der ursprüngliche Operator L durch glatte Operatoren approximiert, so dass sich die Aussagen der beiden Sätze auf diesen übertragen lassen.

3.1.1 Beweis für Systeme mit glatten Koeffizienten

Es seien B, A^0 und die A^j glatt.
Dann liefert uns Theorem 3.1 in [14] eine eindeutige Lösung $u \in X_m([0,T] \times \Omega)$, so dass in diesem Fall nur noch Satz 3.2 gezeigt werden muss.
Zu bemerken ist dabei, dass sich der Beweis zu Lemma 3.3 in [14] induktiv fortführen läßt,

so dass man die Existenz von Funktionenfolgen $(F_k)_k \subset H^{m+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2}([0,T] \times \Omega)$ und $(f_k)_k \subset H^{m+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2}(\Omega)$ zeigen kann, die in H^m gegen F bzw. f konvergieren und die $Mf_k^p = 0$, also die Kompatibilitätsbedingungen, für $0 \leq p \leq m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ erfüllen. Zu diesen Folgen liefert uns Theorem 3.1 in [14] eine Lösungsfolge $(u_k)_k \subset X_{m+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2}([0,T], \Omega) \subset C^{m+1}([0,T] \times \Omega)$. Zeigt man nun für diese u_k die Abschätzungen in Satz 3.2 für m anstelle von $m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$, folgt aus diesen, dass u_k in $X_m([0,T], \Omega)$ gegen u konvergiert und die Abschätzungen somit auch für u gelten.
Man kann daher im Beweis zu Satz 3.2 davon ausgehen, dass die Funktionen F, f und u C^{m+1}-Funktionen sind und somit alle folgenden Rechnungen wohldefiniert sind.
Um Satz 3.2 zu beweisen reduzieren wir das Problem mit Hilfe einer *Partition der Eins* und lokaler Koordinatentransformationen auf die Fälle

(i) $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, |x| < 1\}$ mit $\partial\Omega \cap supp(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0, |x| < 1\}$ und einer konstanten „Randbedingungsmatrix“ M.

(ii) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit $\partial\Omega \cap supp(u) = \emptyset$.

Bei der Durchführung dieser Reduktion richten wir uns stellenweise nach [7], Seite 449-452. Der Rand $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen und somit kompakt. Die Voraussetzung, dass Ω die gleichmäßige C^m-Regularitätseigenschaft besitzt, liefert deshalb eine endliche offene Überdeckung $\{\hat{U}_i\}_{1 \leq i \leq \hat{N}}$ von $\partial\Omega$ und dazu m-glatte Transformationen $\{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq \hat{N}}$ mit den in Definition 1.5 beschriebenen Eigenschaften.
So gilt insbesondere $\hat{U}_i \cap \Omega = \left\{x \in \hat{U}_i : \phi_{i,n}(x) > 0\right\}$ und $\hat{U}_i \cap \partial\Omega = \left\{x \in \hat{U}_i : \phi_{i,n}(x) = 0\right\}$ für $1 \leq i \leq \hat{N}$.
Sei $1 \leq i \leq \hat{N}$. Da Φ_i eine Transformation ist, gibt es zu jedem $\hat{x} \in \hat{U}_i$ eine Umgebung $U_{\hat{x}} \subset \hat{U}_i$ und ein $1 \leq j \leq n$ so, dass die Ungleichung $\phi_{i,n}(x) > 0$ in $U_{\hat{x}}$ nach x_j aufgelöst werden kann und es eine Funktion $g_i \in C^m$ gibt, so dass für alle $x \in \left(\hat{U}_i \cap U_{\hat{x}}\right)$

$$x \in \hat{U}_i \cap \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \phi_{i,n}(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_j > g_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \tag{3.8}$$

gilt.
Da $\partial\Omega$ kompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die $\hat{U}_i$ so gewählt sind, dass (3.8) für alle $x \in \hat{U}_i$ gilt. Außerdem sei ohne Einschränkung $j = n$.
Dann liegt $x \in \hat{U}_i$ genau dann in $\hat{U}_i \cap \partial\Omega$, falls x von der Form

$$x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, g_i(x_1, \ldots, x_{n-1}))^T$$

ist.

Um in den Lokalisierungen mit konstanten Matrizen M arbeiten zu können, verwenden wir die in [7], Proposition 3.1, bewiesene Aussage, aus der direkt das folgende Lemma folgt.

Lemma 3.3
Zu jedem $s \in \partial\Omega$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von s, eine in U definierte, glatte, matrixwertige Funktion T und eine konstante Matrix $\tilde{M}$, so dass $T(x)$ für alle $x \in U$ unitär ist und für alle $v \in \mathbb{R}^l$ und alle $x \in U$ gilt:

$$M(x)v = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{M}T(x)v = 0$$

Aufgrund dieser Aussage und der Kompaktheit von $\partial\Omega$ finden wir eine endliche Überdeckung $\{\tilde{U}_j\}_{1\leq j\leq \tilde{N}}$ von $\partial\Omega$, so dass es zu jeder Menge $\tilde{U}_j$ eine matrixwertige Funktion $\tilde{T}_j$ und eine konstante Matrix $\tilde{M}_j$ gibt, mit denen die Aussagen von Lemma 3.3 in $\tilde{U}_j$ erfüllt sind.
Für eine von Ω abhängige Konstante $c = c(\Omega) > 0$ kann die Überdeckung für spätere Zwecke ohne Einschränkung so gewählt werden, dass für alle $1 \leq j \leq \tilde{N}$

$$\operatorname{diam}(\tilde{U}_j) < \min\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \left(2c(\Omega)c_{A^\nu}|||A^j|||_{s-1,T}\right)^{-4}\right\} \tag{3.9}$$

gilt.

Wir definieren

$$\mathcal{U} := \left\{U \subset \mathbb{R}^n : U = \tilde{U}_j \cap \hat{U}_i \quad \text{für ein} \quad 1 \leq j \leq \tilde{N} \quad \text{und ein} \quad 1 \leq i \leq \hat{N}\right\}.$$

Dann ist auch $\mathcal{U}$ eine endliche Überdeckung von $\partial\Omega$ und es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass die Menge $\mathcal{U}$ als $\{U_i\}_{1\leq i\leq N}$ geschrieben werden kann.
Nach Konstruktion gilt für alle Mengen U_i

(i) Zu jeder Menge U_i gibt es eine matrixwertige Funktion T_i und eine konstante Matrix M_i, mit denen die Aussagen von Lemma 3.3 in U_i gelten.

(ii) Für alle $1 \leq i \leq N$ ist $\operatorname{diam}(U_i) < \min\left\{1, (2c(\Omega)c_{A^\nu}|||A^j|||_{s-1,T})^{-4}\right\}$.

(iii) Zu $1 \leq i \leq N$ gibt es eine Funktion g_i, so dass für $x \in U_i$

$$x \in U_i \cap \Omega \quad \Leftrightarrow \quad x \in U_i \quad \text{und} \quad x_n > g_i(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

und

$$x \in U_i \cap \partial\Omega \quad \Leftrightarrow \quad x \in U_i \quad \text{und} \quad x_n = g_i(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

gilt.
Für $1 \leq i \leq N$ definieren wir damit Koordinatentransformationen $G_i : U_i \longrightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$.

Sei dazu $s^{(i)} \in U_i \cap \partial\Omega$ fest und

$$G_i(x) := \begin{pmatrix} x_1 - s_1^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n-1} - s_{n-1}^{(i)} \\ x_n - g_i(x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion gilt $G_i(U_i) =: V_i \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ und mit $R_+^n := \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$ ist $G_i(U_i \cap \Omega) = V_i \cap R_+^n =: \Omega_i$ und $G_i(U_i \cap \partial\Omega) = V_i \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$.
Außerdem ist G_i umkehrbar mit

$$G_i^{-1}(y) =: H_i(y) = \begin{pmatrix} y_1 + s_1^{(i)} \\ \vdots \\ y_{n-1} + s_{n-1}^{(i)} \\ y_n + g_i(y_1 + s_1^{(i)}, \cdots, y_{n-1} + s_{n-1}^{(i)}) \end{pmatrix}.$$

Für die *Jacobi-Matrix* von H_i gilt

$$J_{H_i}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1} g_i & \partial_{y_2} g_i & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} g_i & \partial_{x_2} g_i & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_i & \partial_2 g_i & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Da Ω beschränkt und die offene Überdeckung $\{U_i\}_{1 \le i \le N}$ von $\partial\Omega$ endlich ist, finden wir eine offene Menge $U_0 \Subset \Omega$, so dass

$$\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{N} U_i$$

gilt.
Theorem 3.15 in [1] liefert für $\bar{\Omega}$ eine C^∞*-Partition der Eins*, die $\{U_i\}_{0 \le i \le N}$ untergeordnet ist, d.h. eine Familie $\{\varphi_i\}_{0 \le i \le N} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

(i) Für $0 \le i \le N$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $0 \le \varphi_i(x) \le 1$.

(ii) Für $0 \le i \le N$ ist $supp(\varphi_i) \subset U_i$.

(iii) Für alle $x \in \bar{\Omega}$ ist $\sum_{i=0}^{N} \varphi_i(x) = 1$.

Sei $u \in X_m([0,T] \times \Omega)$ die eindeutige Lösung zu (3.1)-(3.3), die uns Theorem 3.1 in [14] für glatte L garantiert.
Für $0 \le i \le N$ seien dazu

$$u_i(t,y) := T_i \varphi_i(H_i(y))\, u(t, H_i(y)) \qquad \text{für} \qquad (t,y) \in [0,T] \times \Omega_i,$$

wobei wir $\Omega_0 = U_0$, $H_0 = Id$, $T_0 = Id$ und $g_0 = 0$ setzen.

An dieser Stelle ist es nun möglich, wie anfangs angekündigt, eine Definition der $|||\cdot|||_{k,tan}$-Norm anzugeben. Zu diesem Zweck sei bemerkt, dass $|||u_i(t)|||_{k,tan}$ für $1 \le i \le N$, also für $U_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, durch

$$|||u_i(t)|||_{k,tan}^2 = |||u_i(t)|||_{\Omega_i,k,tan}^2 = \sum_{\substack{|\alpha|\le k\\ \alpha_n=0}} \|D^\alpha u_i(t)\|_{L^2(\Omega_i)}^2$$

und für $i = 0$, also für $U_i \cap \partial\Omega = \emptyset$, durch

$$|||u_i(t)|||_{k,tan} = |||u_i(t)|||_{\Omega_i,k,tan} = |||u_i(t)|||_{\Omega_i,k}$$

direkt angeben werden kann. Damit sei nun

$$|||u(t)|||_{k,tan} := |||u(t)|||_{\Omega,k,tan} := \sum_{i=0}^{N} |||u_i(t)|||_{\Omega_i,k,tan}.$$

Folglich ist die $|||\cdot|||_{k,tan}$-Norm von der Wahl der Zerlegung des Gebietes und der Koordinatentransformationen abhängig. Dies ist aber für den Beweis nicht von Bedeutung.

Wir definieren nun für $0 \le i \le N$ in Ω_i neue Operatoren L_i durch

$$L_i(t,y) \equiv A_i^0(t,y)\partial_t + A_i^j(t,y)\partial_{y_j} + B_i(t,y) \qquad \text{für} \quad (t,y) \in [0,T] \times \Omega_i$$

mit

$$\begin{aligned}
A_i^j(t,\cdot) &:= A^j\left(t, H_i(\cdot)\right) \qquad \text{für} \quad 0 \le j \le n-1,\\
A_i^n(t,\cdot) &:= \left(-\sum_{j=1}^{n-1} A^j\left(t, H_i(\cdot)\right)\partial_j g_i\left(H_i(\cdot)\right)\right) + A^n(t, H_i(\cdot)),\\
B_i(t,\cdot) &:= B\left(t, H_i(\cdot)\right) \qquad \text{und}\\
F_i(t,\cdot) &:= \left(A^j\left(t, H_i(\cdot)\right)\partial_j T_i\varphi_i\left(H_i(\cdot)\right)\right) u\left(t, H_i(\cdot)\right) + T_i\varphi_i\left(H_i(\cdot)\right) F\left(t, H_i(\cdot)\right).
\end{aligned}$$

Lemma 3.4

Für alle $0 \le i \le N$ gilt

$$L_i u_i = F_i \qquad \text{in} \quad [0,T] \times \Omega_i.$$

Beweis: Sei $0 \leq i \leq N$, $(t,y) \in [0,T] \times \Omega_i$ und $x = H_i(y)$. Dann ist für $1 \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned}
&\partial_{y_j} u_i(t,y) \\
&= \left[\nabla_x \left(T_i\varphi_i\right)\left(H_i(y)\right) \cdot \left(J_{H_i(y)}\right)_{\cdot,j}\right] u(t,H_i(y)) + T_i\varphi_i(H_i(y)) \left[\nabla_x u(t,H_i(y)) \cdot \left(J_{H_i(y)}\right)_{\cdot,j}\right] \\
&= \partial_j \left(T_i\varphi_i\right)(x) \cdot u(t,x) + T_i\varphi_i(x) \cdot \partial_j u(t,x) + \partial_n \left(T_i\varphi_i(x) u(t,x)\right) \cdot \partial_j g_i(x)
\end{aligned}$$

und

$$\partial_{y_n} u_i(t,y) \;=\; \partial_n \left(T_i\varphi_i(x)\right) \cdot u(t,x) + T_i\varphi_i(x)\partial_n u(t,x).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&L_i(t,y)u_i(t,y) \\
&= A_i^0(t,y)T_i\varphi_i(x)\partial_t u(t,x) + \sum_{j=1}^{n-1} A_i^j(t,y)\left[\partial_j \left(T_i\varphi_i\right)(x) \cdot u(t,x) + T_i\varphi_i(x) \cdot \partial_j u(t,x)\right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} A_i^j(t,y)\partial_n \left(T_i\varphi_i(x)u(t,x)\right) \cdot \partial_j g_i(x) - \sum_{j=1}^{n-1} A_i^j(t,y)\partial_n \left(T_i\varphi_i(x)u(t,x)\right) \cdot \partial_j g_i(x) \\
&\quad + A^n(t,H_i(y))\left[\partial_n \left(T_i\varphi_i\right)(x) \cdot u(t,x) + T_i\varphi_i(x) \cdot \partial_n u(t,x)\right] + B_i(t,y)T_i\varphi_i(x)u(t,x) \\
&= T_i\varphi_i(x)\left[A^0(t,x)\partial_t u(t,x) + A^j(t,x)\partial_j u(t,x) + B(t,x)u(t,x)\right] \\
&\quad + A^j(t,x)\partial_j \left(T_i\varphi_i\right)(x) \cdot u(t,x).
\end{aligned}$$

Aus $[A^0(t,x)\partial_t u(t,x) + A^j(t,x)\partial_j u(t,x) + B(t,x)u(t,x)] = L(t,x)u(t,x) = F(t,x)$ folgt nach Definition von F_i, dass $L_i(t,y)u_i(t,y) = F_i(t,y)$ gilt. □

Lemma 3.5
Es sei $1 \leq i \leq N$. Dann gilt für die zum Operator L_i und dem Gebiet Ω_i gehörende Randmatrix A_i^ν:
(i) $A_i^\nu(t,y) = -A_i^n(t,y) = -A^\nu(t,x)$ *für* $(t,x) \in [0,T] \times U_i \cap \partial\Omega$ *und* $y = G_i(x)$.
(ii) A_i^n *besitzt in* Ω_i *ein beschränktes Inverses mit* $\|(A_i^n)^{-1}\|_{op} \leq 2c_{A^\nu}$.

Beweis: Die Normale zu $\partial\Omega_i \cap supp(u_i)$ ist $\nu_i \equiv (0, \cdots, 0, -1)^T$. Damit gilt für alle $(t,y) \in [0,T] \times (\partial\Omega_i \cap supp(u_i))$ die Gleichheit $A_i^\nu(t,y) = -A_i^n(t,y)$.
Für $x \in U_i \cap \partial\Omega$ ist $\nu(x) = \begin{pmatrix} -\nabla g_i(x) \\ 1 \end{pmatrix}$ die Normale zu $\partial\Omega$ und damit
$A^\nu(t,x) = -\sum_{j=1}^{n-1} A^j(t,x)\partial_j g_i(x) + A^n(t,x) = A_i^n(t,y)$, woraus (i) direkt folgt.
Um (ii) zu zeigen sei für $0 < \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned}
C^{m,\lambda}\left(\bar{\Omega}\right) \;:=\; \Big\{ & u \in C^m\left(\bar{\Omega}\right) : \text{Es gibt ein} \quad K > 0, \quad \text{so dass für alle} \quad x,y \in \Omega \\
& \text{und für alle} \quad 0 \leq |\alpha| \leq m \quad |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq K|x-y|^\lambda \quad \text{gilt}\Big\}
\end{aligned}$$

und dazu

$$\|u\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} := \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)| + \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Dann gilt mit $\|A\|_{op} \leq \max_{k,l}\{|a_{kl}|\}$ für $0 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} \|A_i^\nu(t,y) - A_i^\nu(t,x)\|_{op} &\leq \max_{k,l}\{|a_{kl}^{i,n}(t,x) - a_{kl}^{i,n}(t,y)|\} \leq \|A_i^n(t)\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}_i)}|x-y|^\lambda \\ &= \|-\sum_{j=1}^{n-1} A^j(t)\partial_j g_i + A^n(t)\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})}|x-y|^\lambda, \end{aligned}$$

für $x, y \in \bar{\Omega}_i$ und $0 < \lambda \leq 1$.
In [1],Theorem 4.12 Part II, wird für Gebiete Ω, die die starke lokale Lipschitzeigenschaft[1] besitzen, die folgende Einbettung bewiesen:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \qquad \text{für} \quad mp > n > (m-1)p \quad \text{und} \qquad 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p}$$

Damit folgt für $\lambda := \frac{1}{4}$

$$\|A_i^\nu(t,y) - A_i^\nu(t,x)\|_{op} \leq c\,(\Omega)\,|||A^j|||_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1,T}|x-y|^\lambda.$$

Sei $x \in \partial\Omega_i \cap \operatorname{supp}(u_i)$ und $y \in \Omega_i$.
Dann gilt wegen Forderung (3.9) $|x-y|^\lambda < \left(2c_{A^\nu}c|||A^j|||_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1,T}\right)^{-1}$ und somit

$$\|A_i^\nu(t,y) - A_i^\nu(t,x)\|_{op} < \frac{1}{c_{A^\nu}}.$$

Da $A_i^\nu(x)$ nach (i) invertierbar ist, folgt aus dieser Abschätzung mit Satz 3.8 in [2] die Invertierbarkeit von $A_i^\nu(y)$.
Außerdem folgt

$$\left\|[A_i^\nu(x) - A_i^\nu(y)]\,A_i^\nu(x)^{-1}\right\|_{op} \leq c_{A^\nu}c|||A^j|||_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1,T}|x-y|^\lambda < \frac{1}{2},$$

so dass der Satz zur Neumann-Reihe[2]

$$\left(Id - [A_i^\nu(x) - A_i^\nu(y)]\,A_i^\nu(x)^{-1}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left([A_i^\nu(x) - A_i^\nu(y)]\,A_i^\nu(x)^{-1}\right)^k$$

[1]Nach [1], 4.11, folgt diese Eigenschaft aus der gleichmäßigen C^m-Regularitätseigenschaft.
[2][2], Satz 3.7

und mit obiger Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|A_i^\nu(y)^{-1}\|_{op} &= \left\| A_i^\nu(x)^{-1} \left(Id - [A_i^\nu(x) - A_i^\nu(y)]\, A_i^\nu(x)^{-1} \right)^{-1} \right\|_{op} \\
&\leq c_{A^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{A^\nu} c |||A^j|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1,T} |x-y|^\alpha \right)^k \\
&< \frac{c_{A^\nu}}{1 - c_{A^\nu} c |||A^j|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1,T} |x-y|^\lambda} \leq 2c_{A^\nu}
\end{aligned}$$

liefert, womit Lemma 3.5 bewiesen ist. □

Lemma 3.6

Falls die Funktionen u_i für $0 \leq i \leq N$ die folgenden zu (3.4) und (3.5) analogen Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&|||u_i(t)|||^2_{\Omega_i,m-1} + |||u_i(t)|||^2_{\Omega_i,m,tan} \\
&\leq d_1^{(i)} e^{d_2^{(i)} t} \left(|||u_i(0)|||^2_{\Omega_i,m-1} + |||u_i(0)|||^2_{\Omega_i,m,tan} + d_3^{(i)} \cdot \int_0^1 e^{-d_2^{(i)}\tau} |||F_i(\tau)|||^2_{\Omega_i,m} \, d\tau \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

und

$$\begin{aligned}
|||u_i(t)|||_{\Omega_i,m} \leq\ & d_4^{(i)} (1 + |||A_i^0, A_i^j|||^a_{\Omega_i,s,T}) \\
& \cdot (|||u_i(t)|||_{\Omega_i,m-1} + |||u_i(t)|||_{\Omega_i,m,tan} + |||F_i(t)|||_{\Omega_i,m-1})
\end{aligned} \tag{3.11}$$

erfüllen, dann gelten die Abschätzungen (3.4) und (3.5) für die Lösung u zu (3.1)-(3.3). Hierbei sollen die Konstanten $d_j^{(i)}$ in gleicher Weise von L_i abhängen, wie die d_j in (3.4) und (3.5) von L abhängen.

Beweis: Für $0 \leq i \leq N$ ist H_i m-glatt mit $|\det(J_{H_i})| \equiv 1$ in Ω.
Nach Theorem 3.41 in [1] sind deshalb die Normen $\|\cdot\|_{U_i \cap \Omega, m}$ und $\|\cdot\|_{\Omega_i,m}$ bzw. $|||\cdot|||_{U_i\cap\Omega,m}$ und $|||\cdot|||_{\Omega_i,m}$ äquivalent.
Es gibt somit eine allein von Ω, m und den Transformationen H_i abhängige Konstante

$k_m > 0$ mit

$$
\begin{aligned}
|||u(t)|||_{\Omega,m} &= |||\sum_{i=0}^{N} \varphi_i u(t)|||_{\Omega,m} \le \sum_{i=0}^{N} |||\varphi_i u(t)|||_{U_i\cap\Omega,m} \\
&\le k_m \sum_{i=0}^{N} |||(\varphi_i \circ H_i)(u\circ H_i)(t)|||_{\Omega_i,m} \le \frac{ck_m}{T} \sum_{i=0}^{N} |||(T_i\varphi_i \circ H_i)(u\circ H_i)(t)|||_{\Omega_i,m} \qquad (3.12)\\
&= \frac{ck_m}{T} \sum_{i=0}^{N} |||u_i(t)|||_{\Omega_i,m} \le \frac{ck_m}{T} \max_{0\le i\le N} \left\{ d_4^{(i)} \left(1 + |||A_i^0, A_i^j|||^a_{\Omega_i,s,T}\right)\right\} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{i=0}^{N} |||u_i(t)|||_{\Omega_i,m-1} + |||u_i(t)|||_{\Omega_i,m,tan} + |||F_i(t)|||_{\Omega_i,m-1} \right),
\end{aligned}
$$

wobei $\frac{1}{T} := \max_{0\le i\le N} \left\{ |||\,(T_i \circ H_i)^{-1}\,|||_{\Omega_i,s} \right\}$ sei. Dabei ist zu bemerken, dass die T_i unitär und somit invertierbar sind und dass für die dritte Abschätzung Lemma B.6 aus Anhang B verwendet wurde.
Nach Definition ist $\sum_{i=0}^{N} |||u_i(t)|||_{\Omega_i,m,tan} = |||u(t)|||_{\Omega,m,tan}$.
Außerdem gibt es, da nach Konstruktion $\max_{0\le i\le N} \left\{ |||A_i^0, A_i^j, B|||_{\Omega_i,s-1,T} \right\} \le |||A^0, A^j, B|||_{s-1,T}$ gilt und aus Lemma 3.5 folgt, dass $c_{A_i^\nu} \le 2c_{A^\nu}$ von i unabhängig ist, ein $\tilde{d}_4 = \tilde{d}_4 \left(c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{s-1,T}\right) > 0$ mit

$$
\max_{0\le i\le N} \left\{ d_4^{(i)} \left(1 + |||A_i^0, A_i^j|||^a_{\Omega_i,s,T}\right)\right\} \le \tilde{d}_4 \left(1 + |||A^0, A^j|||^a_{\Omega,s,T}\right).
$$

Analog zu k_m gibt es auch eine Konstante $c_{m-1} > 0$, so dass man mit Lemma B.6

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N} |||u_i(t)|||_{\Omega_i,m-1} &\le c_{m-1} c \max_{0\le i\le N} \{|||T_i|||_{\Omega_i,s}\} \sum_{i=0}^{N} |||\varphi_i u(t)|||_{\Omega,m-1} \\
&\le c_{m-1} c \underbrace{c \max_{0\le i\le N} \{|||T_i|||_{\Omega_i,s}\}}_{=:\bar{T}} \max_{0\le i\le N} \{|||\varphi_i|||_{\Omega,s}\} \cdot N |||u(t)|||_{\Omega,m-1},
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N} |||F_i(t)|||_{\Omega_i,m-1} &\le c_{m-1}\bar{T} \sum_{i=0}^{N} |||A^j(t)(\partial_j\varphi_i)u(t)|||_{U_i\cap\Omega,m-1} + |||\varphi_i F(t)|||_{U_i\cap\Omega,m-1} \\
&\le c_{m-1}\bar{T} c \max_{0\le i\le N} \{|||\varphi_i|||_{\Omega_i,s}\} N \cdot \left(c|||A^j(t)|||_{\Omega,s-1}|||u(t)|||_{\Omega,m-1} + |||F(t)|||_{\Omega,m-1}\right)
\end{aligned}
$$

erhält.
Da bis auf $\tilde{d}_4$ alle auftretenden Konstanten allein von Ω, m, und M abhängen, finden wir eine Konstante $d_4 > 0$, die von den in Satz 3.2 aufgelisteten Systemeigenschaften abhängt, so dass aus (3.12) nach Einsetzen der obigen Abschätzungen

$$
|||u(t)|||_m \le d_4(1 + |||A^0, A^j|||^a_{s,T}) \left(|||u(t)|||_{m-1} + |||u(t)|||_{m,tan} + |||F(t)|||_{m-1}\right)
$$

folgt. Damit ist gezeigt, dass die Abschätzung (3.5) gilt, falls (3.11) für alle $0 \leq i \leq N$ erfüllt ist.
Mit analogen Abschätzungen zeigt man, dass es positive Konstanten

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1\left(\frac{1}{c_{A^0}}, |||A^0, A^j|||_{s-1,T}\right), \\ k_2 &= k_2\left(\frac{1}{c_{A^0}}, c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{s,T}\right) \quad \text{und} \\ k_3 &= k_3\left(c_{A^\nu}, |||A^0, A^j, B|||_{s,T}\right) \end{aligned}$$

gibt, so dass die Ungleichung

$$\begin{aligned} |||u(t)|||_{m-1}^2 \; + \; |||u(t)|||_{m,tan}^2 &\leq k_1 e^{k_2 t} \cdot \left(|||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2\right) \\ &+ k_3 k_1 e^{k_2 t} \cdot \int_0^t e^{-k_2\tau} \left(|||F(\tau)|||_m^2 + |||u(\tau)|||_m^2\right) d\tau \end{aligned} \tag{3.13}$$

gilt, falls (3.10) für alle $0 \leq i \leq N$ erfüllt ist.
Durch Einsetzen von (3.5) in (3.13) erhalten wir für $c := \left(d_4(1 + |||A^0, A^j|||_{s,T}^a)\right)^2$

$$\begin{aligned} & |||u(t)|||_{m-1}^2 + |||u(t)|||_{m,tan}^2 \\ \leq \;& k_1 e^{k_2 t} \cdot \Bigg\{ |||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2 + k_3 \int_0^t e^{-k_2\tau} |||F(\tau)|||_m^2 \\ & + k_3 \int_0^t e^{-k_2\tau} c \left(|||u(\tau)|||_{m-1} + |||u(\tau)|||_{m,tan} + |||F(\tau)|||_{m-1}\right)^2 d\tau \Bigg\} \\ \leq \;& k_1 e^{k_2 t} \cdot \left\{ |||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2 + k_3(1+3c) \int_0^t e^{-k_2\tau} |||F(\tau)|||_m^2 \, d\tau \right\} \\ & + 3k_1 k_3 c e^{k_2 T} \int_0^t |||u(\tau)|||_{m-1}^2 + |||u(\tau)|||_{m,tan}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Anwenden des Lemmas von Gronwall, Satz 1.3, führt zu

$$\begin{aligned} & |||u(t)|||_{m-1}^2 + |||u(t)|||_{m,tan}^2 \\ \leq \;& k_1 e^{k_2 t} \cdot \left\{ |||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2 + k_3(1+3c) \int_0^t e^{-k_2\tau} |||F(\tau)|||_m^2 \, d\tau \right\} \\ & + 3k_1 k_3 c e^{k_2 T} \int_0^t e^{\left(3k_1 k_3 c e^{k_2 T}\right)\tau} k_1 e^{k_2 t} \cdot \left(|||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2\right) d\tau \\ & + 3k_1 k_3 c e^{k_2 T} \int_0^t e^{\left(3k_1 k_3 c e^{k_2 T}\right)\tau} k_1 e^{k_2 \tau} k_3(1+3c) \int_0^\tau e^{-k_2 s} |||F(s)|||_m^2 \, ds \, d\tau \end{aligned}$$

und nach wenigen Rechenschritten zu (3.4) für $d_1 := k_1$, $d_2 := k_2 + 3k_1 k_3 c e^{k_2 T}$ und $d_3 := k_3(1+3c)$.
Somit ist Lemma 3.6 bewiesen. □

Analoge Rechnungen zeigen, dass für $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3$ eine Lemma 3.6 entsprechende Aussage gilt. Damit ist gemeint, dass (3.7) und (3.6) ebenfalls aus den entsprechenden Abschätzungen für die Lokalisierungen folgen.
Es genügt somit die Abschätzungen (3.4)-(3.7) für die Lokalisierungen zu zeigen. Dies wird durch die günstigen Eigenschaften der Gebiete Ω_i, der Randmatrizen A_i^ν und der Tatsache, dass die Randbedingungsmatrizen M_i konstant sind, erleichtert.
Für $i = 0$ ist der Schnitt $\partial\Omega_i \cap supp(u_i)$ leer. Da somit keine Randterme auftreten, sind die Abschätzungen in diesem Fall unproblematischer als für $i \geq 1$. Wir führen die Rechnungen deshalb nur für die Lokalisierungen u_i mit $1 \leq i \leq N$ durch.
Zur übersichtlicheren Darstellung schreiben wir im Folgenden allerdings u, Ω, L, M usw. anstelle von u_i, Ω_i, L_i, M_i usw. und gehen davon aus, dass die gewünschten Eigenschaften der Gebiete und Lemma 3.5 erfüllt sind.

Wir beweisen zunächst vier Ungleichungen, aus denen die Abschätzungen (3.4)-(3.7) folgen werden.
Dabei stehe $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für das L^2-Skalarprodukt, d.h. $\langle u, v\rangle \equiv \int_\Omega u(x)\bar{v}(x)\,dx$ für $u, v \in L^2$.

Lemma 3.7
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist für $0 \leq i \leq m-1$

$$\|\partial_t^i \partial_n^{m-i} u\|_{L^2} \leq \Gamma_1 \cdot \|\partial_t^{i+1}\partial_n^{m-i-1}u\|_{L^2} + \varepsilon \sum_{j=0}^{m-1} \|\partial_t^j \partial_n^{m-j} u\|_{L^2} + \Gamma_2 \cdot \left(1 + |||A^0, A^j|||_{s,T}^a\right) \cdot \left(|||u|||_{m,tan} + |||u|||_{m-1} + |||F|||_{m-1}\right) \tag{3.14}$$

und für alle α mit $|\alpha| \leq m-1$ oder $|\alpha| \leq m$ und $\alpha_n = 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle D^\alpha u, A^0 D^\alpha u\right\rangle \leq \Gamma_3 \cdot |||u|||_m^2 + |||F|||_m^2. \tag{3.15}$$

Falls $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3$ gilt, kann der Term $|||A^0, A^j|||_{s,T}^a$ in (3.14) weggelassen werden und für alle α mit $|\alpha| \leq m-1$ oder $|\alpha| \leq m$ und $\alpha_n = 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle D^\alpha u, A^0 D^\alpha u\right\rangle \leq \Gamma_4 \cdot \left(|||A^0, A^j, B|||_{m,T}^2 |||u|||_{m-1}^2 + |||u|||_m^2\right) + |||F|||_m^2. \tag{3.16}$$

Dabei sind die Konstanten Γ_1, Γ_2, Γ_3 und Γ_4 positiv und hängen in folgender Weise stetig *und monoton wachsend von ε und dem System ab:*

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \Gamma_1\left(|||A^0|||_{s-1,T}, c_{A^\nu}\right)\\ \Gamma_2 &= \Gamma_2\left(|||A^0, A^j, B|||_{s-1,T}, c_{A^\nu}\frac{1}{\varepsilon}, \Omega\right)\\ \Gamma_3 &= \Gamma_3\left(|||A^0, A^j, B|||_{s,T}\right)\\ \Gamma_4 &= \Gamma_4\left(|||A^0, A^j, B|||_{m-1,T}\right)\end{aligned}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Um (3.14) zu zeigen lösen wir die Gleichung $Lu = F$ nach $A^n\partial_n u$ auf. Anwenden des Differentialoperators $\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}$ auf beide Seiten liefert

$$\begin{aligned}\partial_t^i\partial_n^{m-i}u &= -(A^n)^{-1}\left(\partial_t^{i-1}\partial_n^{m-i-1}\left(\partial_t A^n\partial_n u\right) + \partial_t^i\partial_n^{m-i-2}\left(\partial_n A^n\partial_n u\right)\right)\\ &\quad +(A^n)^{-1}\left(\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}(F - A^0\partial_t u - \sum_{j=1}^{n-1}A^j\partial_j u - Bu)\right).\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.5 folgt $\|(A^n)^{-1}\|_{op} \leq 2c_{A^\nu}$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c_{A^\nu}}\cdot\|\partial_t^i\partial_n^{m-i}u\|_{L^2} &\leq \left\|\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}F\right\|_{L^2} + \left\|\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}\left(Bu\right)\right\|_{L^2} + \sum_{j=0}^{n-1}\left\|A^j\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}\partial_j u\right\|_{L^2}\\ &+ \sum_{j=0}^{n}\|\partial_t^{i-1}\partial_n^{m-i-1}\left(\partial_t A^j\partial_j u\right)\|_{L^2} + \|\partial_t^i\partial_n^{m-i-2}\left(\partial_n A^j\partial_j u\right)\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Wir schätzen nun die Summanden der rechten Seite von (3.17) nacheinander ab.
Mit Lemma B.6 gilt

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}F\right\|_{L^2} + \left\|\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}\left(Bu\right)\right\|_{L^2}\\ &\leq |||F|||_{m-1} + |||Bu|||_{m-1} \leq |||F|||_{m-1} + c|||B|||_{s-1}|||u|||_{m-1}.\end{aligned}$$

Der Sobolevsche Einbettungsatz liefert

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}\|A^j\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}\partial_j u\|_{L^2} &\leq \|A^0\|_{C^0}\|\partial_t^{i+1}\partial_n^{m-i-1}u\|_{L^2} + \|A^j\|_{C^0}\|\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}\partial_j u\|_{L^2}\\ &\leq c|||A^0|||_{s-1}\|\partial_t^{i+1}\partial_n^{m-i-1}u\|_{L^2} + c|||A^j|||_{s-1}\|\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}\partial_j u\|_{L^2},\end{aligned}$$

woraus mit Lemma B.3 für alle $\rho > 0$ und eine von $\frac{1}{\rho}$, Ω und m abhängige Konstante $\Gamma_5 > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}\|A^j\partial_t^i\partial_n^{m-i-1}\partial_j u\|_{L^2} &\leq c|||A^0|||_{s-1}\|\partial_t^{i+1}\partial_n^{m-i-1}u\|_{L^2}\\ &+c|||A^j|||_{s-1}\cdot\rho\sum_{i=0}^{m-1}\|\partial_t^i\partial_n^{m-i}u\|_{L^2} + c|||A^j|||_{s-1}\cdot\Gamma_5\left(|||u|||_{m,tan} + |||u|||_{m-1}\right)\end{aligned}$$

folgt. Um die übrigen Summanden der rechten Seite von (3.17) abzuschätzen verwenden wir Lemma B.5 und wieder Lemma B.6.
Falls $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$ ist, folgt mit Abschätzung (2.6) in Lemma B.6 direkt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} \|\partial_t^{i-1}\partial_n^{m-i-1}\left(\partial_t A^j \partial_j u\right)\|_{L^2} + \|\partial_t^{i}\partial_n^{m-i-2}\left(\partial_n A^j \partial_j u\right)\|_{L^2} \\
\leq \;& c\sum_{j=0}^{n} \left(|||\partial_t A^j|||_{m-2} + |||\partial_n A^j|||_{m-2}\right)|||u|||_{m-2} + \left(|||\partial_t A^j|||_{m-3} + |||\partial_n A^j|||_{m-3}\right)|||u|||_{m-1} \\
\leq \;& 4c|||A^0, A^j|||_{s-1}|||u|||_{m-1}.
\end{aligned}$$

Für $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$ gilt $s = m$, womit (2.5) in Lemma B.6

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} \|\partial_t^{i-1}\partial_n^{m-i-1}\left(\partial_t A^j \partial_j u\right)\|_{L^2} + \|\partial_t^{i}\partial_n^{m-i-2}\left(\partial_n A^j \partial_j u\right)\|_{L^2} \\
\leq \;& c\sum_{j=0}^{n} \left(|||\partial_t A^j|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1} + |||\partial_n A^j|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}\right)|||\partial_j u|||_{m-2} \\
\leq \;& 2c|||A^0, A^j|||_{s-1}|||u|||_{m-1}.
\end{aligned}$$

liefert. Sei nun $m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$. Dann gilt für $0 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t^{i-1}\partial_n^{m-i-1}\left(\partial_t A^j \partial_j u\right)\|_{L^2} + \|\partial_t^{i}\partial_n^{m-i-2}\left(\partial_n A^j \partial_j u\right)\|_{L^2} \\
\leq \;& \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=m-1 \\ |\beta|\leq m-3}} \|(D^\alpha A^j)(D^\beta \partial_j u)\|_{L^2} + \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=m-1 \\ |\beta|=m-2, |\alpha|=1}} \|(D^\alpha A^j)(D^\beta \partial_j u)\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Auf die erste Summe können wir Lemma B.5 mit $s_1 := s$ und $s_2 := m - 2$ anwenden, was uns Konstanten $0 < a_1, a_2 < 1$ liefert, so dass

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=m-1 \\ |\beta|\leq m-3}} \|(D^\alpha A^j)(D^\beta \partial_j u)\|_{L^2} \;&\leq\; c|||A^j|||_s^{a_1}|||A^j|||_{s-1}^{1-a_1}|||\partial_j u|||_{m-2}^{a_2}|||\partial_j u|||_{m-3}^{1-a_2} \\
&\leq\; c|||A^j|||_s^{a_1}|||A^j|||_{s-1}^{1-a_1}|||u|||_{m-1}
\end{aligned}$$

gilt. Um die zweite Summe abzuschätzen wenden wir für $1 \leq j \leq m - 1$ Lemma B.5 mit $s_1 := s - 1$ und $s_2 := m - 1$ und Lemma B.3 für $\rho > 0$ an, was uns Konstanten $0 < a_1, a_2 < 1$

und $\Gamma_5\left(\frac{1}{\rho}\right) > 0$ liefert, so dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=m-1\\ |\beta|=m-2,|\alpha|=1}} \|(D^\alpha A^j)(D^\beta\partial_j u)\|_{L^2}\\
&\leq \; c|||A^j|||_{s-1}^{a_1}|||A^j|||_{s-2}^{1-a_1}|||\partial_j u|||_{m-1}^{a_2}|||\partial_j u|||_{m-2}^{1-a_2} \leq c|||A^j|||_{s-1}|||\partial_j u|||_{m-1}\\
&\leq \; c|||A^j|||_{s-1}\cdot\rho\sum_{i=0}^{m-1}\|\partial_t^i\partial_n^{m-i}u\|_{L^2} + c|||A^j|||_{s-1}\cdot\Gamma_5\left(|||u|||_{m,tan}+|||u|||_{m-1}\right)
\end{aligned}$$

gilt.

Problematisch sind nun noch die auftretenden Terme der Form $\|D^1A^0D^\beta_{t,n}\partial_t u\|_{L^2}$ und $\|D^1A^nD^\beta_{t,n}\partial_n u\|_{L^2}$ für $|\beta| = m-2$. Indem man auf diese Lemma B.5 für $s_1 := s-2$ und $s_2 := 1$ anwendet, erhält man für Konstanten $0 < a_1, a_2 < 1$

$$\begin{aligned}
\|D^1A^0D^\beta_{t,n}\partial_t u\|_{L^2} &\leq c|||A^0|||_{s-1}^{a_1}|||A^0|||_{s-2}^{1-a_1}|||D^\beta_{t,n}\partial_t u|||_1^{a_2}|||D^\beta_{t,n}\partial_t u|||_0^{1-a_2}\\
&\leq \; c|||A^0|||_{s-1}\left(\gamma|||D^\beta_{t,n}\partial_t u|||_1 + c\left(\frac{1}{\gamma}\right)|||u|||_{m-1}\right).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Abschätzung $c_1^a c_2^{1-a} \leq \varepsilon c_1 + c(\frac{1}{\varepsilon})c_2$ für alle $\varepsilon > 0$, $0 < a < 1$ und $c_1, c_2 > 0$, die direkt aus der Youngschen Ungleichung folgt, verwendet.

Wir setzten $\gamma := \frac{\rho}{c|||A^0|||_{s-1}}$ und erhalten mit Lemma B.3

$$\begin{aligned}
&\|D^1A^0D^\beta_{t,n}\partial_t u\|_{L^2}\\
&\leq \; \rho\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_0+\alpha_n=m-1}}\|D^\alpha u\|_{L^2} + \rho\sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j\partial_n^{m-j}u\|_{L^2} + \rho\|\partial_t^m u\|_{L^2} + \tilde{c}\left(|||A^0|||_{s-1},\frac{1}{\rho}\right)|||u|||_{m-1}\\
&\leq \; (\rho^2+\rho)\sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j\partial_n^{m-j}u\|_{L^2} + \tilde{\Gamma}_5\left(|||A^0|||_{s-1},\frac{1}{\rho}\right)\cdot\left(|||u|||_{m,tan}+|||u|||_{m-1}\right).
\end{aligned}$$

Eine analoge Abschätzung erhält man durch das gleiche Vorgehen für $\|D^1A^nD^\beta_{t,n}\partial_n u\|_{L^2}$, wobei in diesem Fall das Auftreten eines $\|\partial_t^m u\|_{L^2}$ entsprechenden Termes der Form $\|\partial_n^m u\|_{L^2}$ vermieden werden kann.

Alle diese Abschätzungen, eingesetzt in (3.17), ergeben nach entsprechender Wahl von ρ in Abhängigkeit von ε, $2c_{A^\nu}$ und $|||A^j|||_{s-1}$ und mit $a := a_1$ die Ungleichung (3.14), wobei der Term $|||A^0, A^j|||_s^a$ weggelassen werden kann, falls $m \geq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 3$ gilt.

Um (3.15) zu beweisen sei im ersten Schritt $|\alpha| \leq m$ und $\alpha_n = 0$.
D^α angewandt auf die Gleichung $Lu = F$ liefert

$$\begin{aligned} & A^0 D^\alpha \partial_t u + A^j D^\alpha \partial_j u + B D^\alpha u \\ = \;& D^\alpha F - \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \gamma\neq\alpha}} c_{\beta,\gamma} \left((D^\beta A^0)(D^\gamma \partial_t u) + (D^\beta A^j)(D^\gamma \partial_j u) + (D^\beta B)(D^\gamma u) \right), \end{aligned}$$

wobei die Konstanten $c_{\beta,\gamma}$ jeweils von β und γ abhängen.
Indem man diese Gleichung mit $2D^\alpha u$ multipliziert und anschließend über Ω integriert, erhält man aufgrund der Symmetrie von A^0 und der A^j

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle (D^\alpha u), A^0 (D^\alpha u) \right\rangle = \left\langle (D^\alpha u), \partial_t A^0 (D^\alpha u) \right\rangle - \langle (D^\alpha u), 2B(D^\alpha u) \rangle \\ & - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j} \left\langle (D^\alpha u), A^j (D^\alpha u) \right\rangle + \left\langle (D^\alpha u), \partial_j A^j (D^\alpha u) \right\rangle + \langle 2(D^\alpha u), (D^\alpha F) \rangle \\ & - \left\langle 2(D^\alpha u), \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \gamma\neq\alpha}} c_{\beta,\gamma} \left((D^\beta A^0)(D^\gamma \partial_t u) + (D^\beta A^j)(D^\gamma \partial_j u) + (D^\beta B)(D^\gamma u) \right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j} \left\langle (D^\alpha u), A^j (D^\alpha u) \right\rangle &= - \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j} \left((D^\alpha u)^T A^j (D^\alpha u) \right) \mathrm{d}x \\ = \; - \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \nu_j \left((D^\alpha u)^T A^j (D^\alpha u) \right) &= - \int_{\partial\Omega} (D^\alpha u)^T A^\nu (D^\alpha u). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nach Konstruktion ist M konstant, so dass aus $Mu = 0$ auch $MD^\alpha u = D^\alpha(Mu) = 0$ in $\partial\Omega$ folgt, falls die Ableitung D^α tangential zu $\partial\Omega$ ist, d.h. falls $\alpha_n = 0$ gilt.
Da wir $\alpha_n = 0$ vorausgesetzt haben, liegt $D^\alpha u$ somit im Nullraum von M.
Die maximale Nichtnegativität der Randbedingung liefert deshalb $-(D^\alpha u)^T A^\nu (D^\alpha u) \leq 0$ in $\partial\Omega$, womit aus (3.19)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j} \left\langle (D^\alpha u), A^j (D^\alpha u) \right\rangle \leq 0$$

folgt. Damit und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung können wir (3.18) durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle (D^\alpha u), A^0 (D^\alpha u) \right\rangle &\leq \|(D^\alpha u)\|_{L^2} \left\| \left(\partial_t A^0 + \partial_j A^j - 2B \right) (D^\alpha u) \right\|_{L^2} + 2 \|(D^\alpha u)\|_{L^2} \|(D^\alpha F)\|_{L^2} \\ &+ 2 \|(D^\alpha u)\|_{L^2} \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \gamma\neq\alpha}} c_{\beta,\gamma} \left(\left\|(D^\beta A^0)(D^\gamma \partial_t u)\right\|_{L^2} + \left\|(D^\beta A^j)(D^\gamma \partial_j u)\right\|_{L^2} + \left\|(D^\beta B)(D^\gamma u)\right\|_{L^2} \right) \end{aligned}$$

weiter abschätzen.

Der Sobolevsche Einbettungssatz liefert

$$\begin{aligned}\|(\partial_t A^0 + \partial_j A^j - 2B)(D^\alpha u)\|_{L^2} &\leq \|\partial_t A^0 + \partial_j A^j - 2B\|_{C^0} \|(D^\alpha u)\|_{L^2} \\ &\leq c|||A^0, A^j, B|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, T} \|(D^\alpha u)\|_{L^2},\end{aligned}$$

so dass mit (2.47)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big\langle (D^\alpha u), A^0(D^\alpha u)\big\rangle \leq\ & c|||A^0, A^j, B|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, T} \|(D^\alpha u)\|_{L^2}^2 + 2\|(D^\alpha u)\|_{L^2}^2 + \|(D^\alpha F)\|_{L^2}^2 \\ & + k_\alpha \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \gamma\neq\alpha}} c_{\beta,\gamma}^2 \Big(\big\|(D^\beta A^0)(D^\gamma \partial_t u)\big\|_{L^2}^2 + \big\|(D^\beta A^j)(D^\gamma \partial_j u)\big\|_{L^2}^2 + \big\|(D^\beta B)(D^\gamma u)\big\|_{L^2}^2 \Big)\end{aligned}$$

folgt. Hierbei hängt $k_\alpha > 0$ nur von α und damit von m ab. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}& c|||A^0, A^j, B|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, T} \|(D^\alpha u)\|_{L^2}^2 + 2\|(D^\alpha u)\|_{L^2}^2 + \|(D^\alpha F)\|_{L^2}^2 \\ \leq\ & \big(c|||A^0, A^j, B|||_{s,T} + 2\big) \cdot |||u|||_m^2 + |||F|||_m^2,\end{aligned}$$

so dass nur noch Terme der Form $\|(D^\alpha A)(D^\beta u)\|_{L^2}^2$ mit $|\alpha| + |\beta| \leq m + 1$ und $|\alpha|, |\beta| \leq m$ abgeschätzt werden müssen.

1. Fall: $|\alpha| \leq s - 1$ und $|\beta| \leq m - 1$: Lemma B.5 liefert $0 < a_1, a_2 < 1$ mit

$$\begin{aligned}\|(D^\alpha A)(D^\beta u)\|_{L^2}^2 &\leq c|||A|||_s^{2a_1} |||A|||_{s-1}^{2(1-a_1)} |||u|||_m^{2a_2} |||u|||_{m-1}^{2(1-a_2)} \\ &\leq c|||A|||_s^2 |||u|||_m^2.\end{aligned}$$

2. Fall: $|\beta| = m$: (also $|\alpha| \leq 1$)

$$\|(D^\alpha A)(D^\beta u)\|_{L^2}^2 \leq \|D^\alpha A\|_{C^0}^2 \|D^\beta u\|_{L^2}^2 \leq c|||A|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}^2 |||u|||_m^2 \leq c|||A|||_s^2 |||u|||_m^2$$

3. Fall: $|\alpha| = m$ und $s = m$: (also $|\beta| \leq 1$)

$$\|(D^\alpha A)(D^\beta u)\|_{L^2}^2 \leq \|D^\alpha A\|_{L^2}^2 \|D^\beta u\|_{C^0}^2 \leq c|||A|||_m^2 |||u|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}^2 \leq c|||A|||_s^2 |||u|||_m^2$$

Damit ist (3.15) für $|\alpha| \leq m$ und $\alpha_n = 0$ gezeigt.

Für $|\alpha| \leq m-1$ erhält man mit analogem Vorgehen direkt

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\langle (D^\alpha u), A^0(D^\alpha u)\right\rangle = \left\langle (D^\alpha u), \partial_t A^0(D^\alpha u)\right\rangle + \langle 2(D^\alpha u)(D^\alpha F)\rangle \\
&\quad + \left\langle 2(D^\alpha u), \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_{\beta,\gamma}\left((D^\beta A^0)(D^\gamma \partial_t u) + (D^\beta A^j)(D^\gamma \partial_j u) + (D^\beta B)(D^\gamma u)\right)\right\rangle \\
&\leq c|||A^0|||_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+2,T}\,\|(D^\alpha u)\|_{L^2}^2 + 2\,\|(D^\alpha u)\|_{L^2}^2 + \|(D^\alpha F)\|_{L^2}^2 \\
&\quad + k_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_{\beta,\gamma}^2\left(\left\|(D^\beta A^0)(D^\gamma \partial_t u)\right\|_{L^2}^2 + \left\|(D^\beta A^j)(D^\gamma \partial_j u)\right\|_{L^2}^2 + \left\|(D^\beta B)(D^\gamma u)\right\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}
$$

woraus (3.15) wie oben folgt.
(3.16) kann analog bewiesen werden, indem man dabei ausnutzt, dass $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$, also $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq m-1$, gilt. □

Behauptung 3.8
Aus (3.14) und (3.15) folgen (3.4) und (3.5).

Beweis: Wir folgern zunächst aus (3.14), dass $\sum_{i=1}^m \|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2}$ durch die rechte Seite von (3.5) abgeschätzt werden kann, falls ε klein genug gewählt wird. Dazu zeigen wir mittels Induktion nach i, dass es zu jedem $0 \leq i \leq m$ eine allein von $|||A^0, A^j, B|||_{s-1,T}, c_{A^\nu}, m, \Omega, M$ und $\frac{1}{\varepsilon}$ abhängige Konstante $\gamma_{(i)}$ gibt mit

$$
\|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2} \leq \varepsilon\left(\sum_{k=0}^{i}(\Gamma_1)^k\right)\cdot \sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j\partial_n^{m-j}u\|_{L^2} + \gamma_{(i)}\cdot R, \tag{3.20}
$$

wobei $R := (1 + |||A^0, A^j|||_{s,T}^a)\,(|||u|||_{m,tan} + |||u|||_{m-1} + |||F|||_{m-1})$ und Γ_1 und a, die in Abschätzung (3.14) auftretenden Konstanten seien.

$i = 0$: Für $i = 0$ kann $\|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2}$ direkt durch $|||u|||_{m,tan}$ abgeschätzt werden, so dass die Behauptung für alle $\gamma_{(0)} \geq 1$ offensichtlich erfüllt ist.

$i \rightsquigarrow i+1$: Aus (3.14) folgt

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t^{m-(i+1)}\partial_n^{i+1}\|_{L^2} &\leq \Gamma_1\|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2} + \varepsilon\sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j\partial_n^{m-j}u\|_{L^2} + \Gamma_2\cdot R \\
&\overset{IV}{\leq} \Gamma_1\left(\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{i}(\Gamma_1)^k\right)\sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j\partial_n^{m-j}u\|_{L^2}\right) + \varepsilon\sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j\partial_n^{m-j}u\|_{L^2} + \underbrace{\left(\Gamma_2 + \Gamma_1\gamma_{(i)}\right)}_{=:\gamma_{(i+1)}}\cdot R \\
&= \varepsilon\left(\sum_{k=0}^{i+1}(\Gamma_1)^k\right)\sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j\partial_n^{m-j}u\|_{L^2} + \gamma_{(i+1)}\cdot R.
\end{aligned}
$$

Damit ist (3.20) gezeigt und wir erhalten

$$\sum_{i=0}^{m} \|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2} \leq \varepsilon P(\Gamma_1) \sum_{i=0}^{m} \|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2} + \Gamma \cdot R,$$

wobei $P(\Gamma_1) := \sum_{i=0}^{m}(m-i+1)(\Gamma_1)^i$ und $\Gamma := \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(i)}$ sei.
Wir wählen nun ε relativ zu $P(\Gamma_1)$ klein genug, lösen nach $\sum_{i=0}^{m} \|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2}$ auf und erhalten

$$\sum_{i=0}^{m} \|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2} \leq \frac{\Gamma \cdot R}{1-\varepsilon P(\Gamma_1)}.$$

Mit Lemma B.3 folgt daraus

$$\begin{aligned}
|||u(t)|||_m &\leq \sum_{i=0}^{m} \|\partial_t^i \partial_n^{m-i} u(t)\|_{L^2} + \sum_{\substack{|\alpha|\leq m,\\ \alpha_0+\alpha_n\leq m-1}} \|D^\alpha u(t)\|_{L^2} \\
&\leq (1+\varepsilon)\sum_{i=0}^{m} \|\partial_t^i \partial_n^{m-i} u(t)\|_{L^2} + \Gamma_5\left(|||u(t)|||_{m,tan} + |||u(t)|||_{m-1}\right) \\
&\leq \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\cdot R}{1-\varepsilon P(\Gamma_1)} + \Gamma_5\left(|||u(t)|||_{m,tan} + |||u(t)|||_{m-1}\right) \\
&\leq d_4 \cdot (1 + |||A^0, A^j|||_{s,T}^a) \cdot (|||u(t)|||_{m,tan} + |||u(t)|||_{m-1} + |||F(t)|||_{m-1})
\end{aligned}$$

mit

$$d_4 := \left(\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon P(\Gamma_1)} + \Gamma_5\right).$$

Damit (3.5) ist gezeigt.

(3.5) eingesetzt in (3.15) ergibt nach Aufsummierung und mit der Bezeichnung $c := 3r_m\Gamma_3 d_4^2 \cdot \left(1 + |||A^0, A^j|||_{s,T}^a\right)^2$ für eine allein von m abhängige Konstante $r_m > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ |\alpha|\leq m-1 \vee \alpha_n=0}} \left\langle D^\alpha u(t), A^0(t) D^\alpha u(t)\right\rangle \\
&\leq c \cdot \left(|||u(t)|||_{m-1}^2 + |||u(t)|||_{m,tan}^2 + |||F(t)|||_{m-1}^2\right) + |||F(t)|||_m^2.
\end{aligned}$$

Integration über t führt zusammen mit der Abschätzung

$$c_{A^0}\|\cdot\|_{L^2}^2 \leq \langle \cdot, A^0 \cdot \rangle \leq |||A^0|||_{s-1,T}\|\cdot\|_{L^2}^2 \tag{3.21}$$

zu

$$|||u(t)|||_{m-1}^2 + |||u(t)|||_{m,tan}^2 \leq \frac{|||A^0|||_{s-1,T}}{c_{A^0}} \cdot \left(|||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2\right) + \frac{c+1}{c_{A^0}} \int_0^t |||F(\tau)|||_m^2 \, \mathrm{d}\tau + \frac{c}{c_{A^0}} \int_0^t |||u(\tau)|||_{m-1}^2 + |||u(\tau)|||_{m,tan}^2 \, \mathrm{d}\tau.$$

Anwenden des Lemmas von Gronwall, Satz 1.3, ergibt

$$\begin{aligned}
&|||u(t)|||_{m-1}^2 + |||u(t)|||_{m,tan}^2 \\
\leq\ & \frac{|||A^0|||_{s-1,T}}{c_{A^0}} \cdot \left(|||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2\right) + \frac{c+1}{c_{A^0}} \int_0^t |||F(\tau)|||_m^2 \, \mathrm{d}\tau \\
& + \frac{c|||A^0|||_{s-1,T}}{c_{A^0}^2} \left(|||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2\right) e^{\frac{c}{c_{A^0}} t} \int_0^t e^{-\frac{c}{c_{A^0}}\tau} \, \mathrm{d}\tau \\
& + \frac{c^2+c}{c_{A^0}^2} e^{\frac{c}{c_{A^0}} t} \int_0^t e^{-\frac{c}{c_{A^0}}\tau} \int_0^\tau |||F(s)|||_m^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\tau \\
=\ & e^{\frac{c}{c_{A^0}} t} \left(\frac{|||A^0|||_{s-1,T}}{c_{A^0}} \cdot \left(|||u(0)|||_{m-1}^2 + |||u(0)|||_{m,tan}^2\right) + \frac{c+1}{c_{A^0}} \int_0^t e^{-\frac{c}{c_{A^0}}\tau} |||F(\tau)|||_m^2 \, \mathrm{d}\tau \right),
\end{aligned}$$

woraus mit $d_1 := \frac{|||A^0|||_{s-1,T}}{c_{A^0}}$, $d_2 := \frac{c}{c_{A^0}}$ und $d_3 := \frac{c+1}{|||A^0|||_{s-1,T}}$ (3.4) folgt. □

Auf analoge Weise folgt für $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$ (3.7) aus der Abschätzung (3.14) ohne den Term $|||A^0, A^j|||_{s,T}^a$ und die Abschätzung (3.6) folgt aus (3.16) zusammen mit (3.7). Da es dabei keine nennenswerten Unterschiede zum eben vorgeführten Beweis gibt, verzichten wir hier auf diese Rechnungen.

Damit haben wir Satz 3.1 und Satz 3.2 unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Koeffizienten in L glatt sind, bewiesen.

3.1.2 Approximation durch glatte Koeffizienten

Wir wollen die Aussagen von Satz 3.1 und Satz 3.2 nun auch für Operatoren L, die lediglich die in Satz 3.1 geforderte Regularität besitzen, zeigen. Dies wird gelingen, indem wir das System durch glatte Systeme approximieren und die Problemstellung so auf den schon im vorherigen Abschnitt bewiesenen Fall reduzieren.
Wir gehen davon aus, dass die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt sind.

Lemma 3.9
Es gibt Folgen $\left(\tilde{F}_k\right)_k \subset H^{m+1}\left([0,T]\times\Omega\right)$ *und* $(f_k)_k \subset H^{m+1}(\Omega)$ *mit*

$$\tilde{F}_k \longrightarrow F \quad in \quad H^m\left([0,T]\times\Omega\right) \quad und \tag{3.22}$$

$$f_k \longrightarrow f \quad in \quad H^m(\Omega), \tag{3.23}$$

so dass $Mf_k^p = 0$ *in* $\partial\Omega$ *für* $0 \le p \le m-1$ *gilt.*

Hierbei sollen die f_k^p den auf Seite 60 definierten f^p entsprechen, mit dem Unterschied, dass F durch $\tilde{F}_k$ und f durch f_k ersetzt wird.
Dieses Lemma ist eine abgeschwächte Form von Lemma 3.3 in [14], die im Gegensatz zur ursprünglichen Form auch für Operatoren L, die nicht glatt sind, gilt. Die Aussage von Lemma 3.9 folgt aus dem Beweis zu Lemma 3.3 in [14], was hier aber nicht bewiesen wird.
Da die Folgen $\left(\tilde{F}_k\right)_k$ und $(f_k)_k$ Cauchyfolgen in $H^m\left([0,T]\times\Omega\right)$ bzw. $H^m(\Omega)$ sind, gibt es ein $c_1 > 0$, so dass

$$\|\tilde{F}_k\|_{H^m([0,T]\times\Omega)} \le c_1 \quad \text{und} \quad \|f_k\|_{H^m(\Omega)} \le c_1 \tag{3.24}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Durch eventuelles Wiederholen einzelner Folgenglieder können die Folgen und die Konstante c_1 ohne Einschränkung so gewählt werden, dass zusätzlich

$$\|\tilde{F}_k\|_{H^{m+1}([0,T]\times\Omega)} \le c_1 k \quad \text{und} \quad \|f_k\|_{H^{m+1}(\Omega)} \le c_1 k \tag{3.25}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma 3.10
Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ *gibt es eine Funktion* $U_k \in H^{m+1}\left([0,T]\times\Omega\right)$ *so, dass für* $0 \le p \le m$

$$\partial_t^p U_k(0,\cdot) = f_k^p \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3.26}$$

gilt.

Außerdem gibt es eine Konstante $c_3 > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|U_k\|_{H^m([0,T]\times\Omega)} \leq c_3 \qquad \text{und} \qquad \|U_k\|_{H^{m+1}([0,T]\times\Omega)} \leq c_3 k \tag{3.27}$$

gilt.

Beweis: f_k^p ist von der Form

$$f_k^p = f_k \qquad \text{für} \quad p = 0$$

und

$$\begin{aligned} f_k^p \;=\; & \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} \left[\left(\partial_t^{p-1-i}(A^0)^{-1}\right) \partial_t^i \tilde{F}_k \right]_{|\{t=0\}\times\Omega} \\ & - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} \left[\partial_t^{p-1-i} \left((A^0)^{-1} \left(A^j \partial_j - B \right) \right) \right]_{|\{t=0\}\times\Omega} f_k^i \qquad \text{für} \quad 1 \leq p \leq m. \end{aligned}$$

Aus $\tilde{F}_k \in H^{m+1}([0,T]\times\Omega)$ folgt

$$\left(\tilde{F}_k, \partial_t^1 \tilde{F}_k, ..., \partial_t^m \tilde{F}_k\right) \in \prod_{p=0}^m H^{m-p+1}([0,T]\times\Omega).$$

Nach Theorem 4.2.3 in [18] gibt es eine stetige lineare Abbildung S_1, die für $0 \leq p \leq m$ so von $H^{m-p+1}([0,T]\times\Omega)$ nach $H^{m-p+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ abbildet, dass

$$\left(S_1\tilde{F}_k, S_1\partial_t^1 \tilde{F}_k, ..., S_1\partial_t^m \tilde{F}_k\right) \in \prod_{p=0}^m H^{m-p+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$$

und

$$\left(S_1\tilde{F}_k, S_1\partial_t^1 \tilde{F}_k, ..., S_1\partial_t^m \tilde{F}_k\right)_{|[0,T]\times\Omega} = \left(\tilde{F}_k, \partial_t^1 \tilde{F}_k, ..., \partial_t^m \tilde{F}_k\right)$$

gilt. Dabei ist zu bemerken, dass in Theorem 4.2.3 in [18] vorausgesetzt wird, dass das Gebiet Ω die *gleichmäßige Kegeleigenschaft* besitzt. Nach [1], 4.11, folgt diese Eigenschaft aus der gleichmäßigen C^m-Regularitätseigenschaft, so dass wir den Satz anwenden dürfen. Auf die einzelnen $S_1\partial_t^p\tilde{F}_k$ wenden wir zuerst Theorem 2.9.1 (a) und anschließend Theorem 4.6.1. (b) in [18] an. So erhalten wir

$$\left(S_1\tilde{F}_k(0,\cdot), S_1\partial_t^1 \tilde{F}_k(0,\cdot), ..., S_1\partial_t^m \tilde{F}_k(0,\cdot)\right) \in \prod_{p=0}^m H^{m-p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $H^{m-p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ für den entsprechenden *Bessel-Potential-Raum* steht.
Diese Räume, die den Begriff der „nichtganzzahligen Ableitung“ realisieren, werden in Anhang B, Definition B.1, definiert. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf [18] verwiesen.

Nach Definition B.2 der Räume $H^{m-p+\frac{1}{2}}(\Omega)$ folgt daraus insbesondere

$$\left(\tilde{F}_k(0,\cdot), \partial_t^1 \tilde{F}_k(0,\cdot), ..., \partial_t^m \tilde{F}_k(0,\cdot)\right) \in \prod_{p=0}^{m} H^{m-p+\frac{1}{2}}(\Omega)\,. \tag{3.28}$$

Aus der obigen Darstellung der f_k^p erhält man zusammen mit $f_k^0 = f_k \in H^{m+1}(\Omega)$, A^0, A^j, $B \in X_m([0,T],\Omega)$ und (3.28) induktiv

$$\left(f_k^0, f_k^1, ..., f_k^m\right) \in \prod_{p=0}^{m} H^{m-p+\frac{1}{2}}(\Omega)\,.$$

Wieder liefert uns Theorem 4.2.3 in [18] eine stetige lineare Abbildung S_2, die für $0 \le p \le m$ von $H^{m-p+1}(\Omega)$ nach $H^{m-p+1}(\mathbb{R}^n)$ abbildet, so dass

$$\left(S_2 f_k^0, S_2 f_k^1, ..., S_2 f_k^m\right) \in \prod_{p=0}^{m} H^{m-p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \left(S_2 f_k^0, S_2 f_k^1, ..., S_2 f_k^m\right)_{|\Omega} = \left(f_k^0, f_k^1, ..., f_k^m\right)$$

gilt.
Theorem 2.9.1 (a) in [18] garantiert uns außerdem die Existenz einer Funktion $\tilde{U}_k \in H^{m+1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ mit

$$\left(\tilde{U}_k(0,\cdot), \partial_t^1 \tilde{U}_k(0,\cdot), ..., \partial_t^m \tilde{U}_k(0,\cdot)\right) = \left(S_2 f_k^0, S_2 f_k^1, ..., S_2 f_k^m\right) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \tag{3.29}$$

und

$$\|\tilde{U}_k\|^2_{H^{m+1}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n)} \le c \sum_{p=0}^{m} \|S_2 f_k^p\|^2_{H^{m-p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}$$

für ein $c > 0$. Da diese Funktion $\tilde{U}_k$ auch in $H^m(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ liegt, gibt es, wieder aufgrund von Theorem 2.9.1 (a) in [18], Funktionen $\tilde{f}_k^p \in H^{m-p-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ für $0 \le p \le m-1$, so dass

$$\left(\tilde{U}_k(0,\cdot), \partial_t^1 \tilde{U}_k(0,\cdot), ..., \partial_t^{m-1} \tilde{U}_k(0,\cdot)\right) = \left(\tilde{f}_k^0, \tilde{f}_k^1, ..., \tilde{f}_k^{m-1}\right) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n$$

und

$$\|\tilde{U}_k\|^2_{H^{m}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n)} \le \tilde{c} \sum_{p=0}^{m-1} \|\tilde{f}_k^p\|^2_{H^{m-p-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}$$

folgt. Wegen (3.29) gilt $S_2 f_k^p = \tilde{f}_k^p$ für $1 \le p \le m-1$.
Es sei nun $U_k := \tilde{U}_{k|_{[0,T]\times\Omega}} \in H^{m+1}([0,T]\times\Omega)$ die Einschränkung von $\tilde{U}_k$ auf $[0,T]\times\Omega$. Dann folgt aufgrund der Stetigkeit von S_2 die Existenz einer Konstanten $c_{S_2} > 0$ mit

$$\|U_k\|^2_{H^{m+1}([0,T]\times\Omega)} \le \|\tilde{U}_k\|^2_{H^{m+1}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n)} \le c_{S_2} c \sum_{p=0}^{m} \|f_k^p\|^2_{H^{m-p+\frac{1}{2}}(\Omega)}$$

und

$$\|U_k\|^2_{H^m([0,T]\times\Omega)} \leq c_{S_2}\tilde{c}\sum_{p=0}^{m-1}\|f_k^p\|^2_{H^{m-p-\frac{1}{2}}(\Omega)}.$$

Aus (3.24) und (3.25) folgt die Existenz einer Konstanten $c_2 > 0$ mit

$$\sum_{p=0}^{m}\|f_k^p\|^2_{H^{m-p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 k \quad \text{und} \quad \sum_{p=0}^{m}\|f_k^p\|^2_{H^{m-p}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2, \tag{3.30}$$

woraus die Existenz einer Konstanten $c_3 > 0$ mit

$$\|U_k\|^2_{H^{m+1}([0,T]\times\Omega)} \leq c_3 k \quad \text{und} \quad \|U_k\|^2_{H^m([0,T]\times\Omega)} \leq c_3$$

folgt und somit Lemma 3.10 bewiesen ist. □

Wir wählen nun glatte Funktionenfolgen $(B_k)_k$, $(A_k^0)_k$, $\left(A_k^j\right)_k$, so dass A_k^0 und die A_k^j für $k \in \mathbb{N}$ symmetrisch sind und

$$|||A_k^0 - A^0, A_k^j - A^j, B_k - B|||_s \leq \frac{1}{k^2}, \tag{3.31}$$

$$\|A_k^\nu - A^\nu\|_{op} \leq \frac{1}{k^2} \tag{3.32}$$

gilt. Es seien damit

$$L_k := A_k^0\partial_t + \left(A_k^j + \frac{1}{k^2}\nu^j Id\right)\partial_j^k + B_k,$$

$$F_k := \tilde{F}_k + \left(A_k^0 - A^0\right)\partial_t U_k + \left(A_k^j + \frac{1}{k^2}\nu^j Id - A^j\right)\partial_j U_k + (B_k - B)\,U_k$$

und

$$\tilde{A}_k^j := A_k^j + \frac{1}{k^2}\nu^j Id.$$

Hierbei sei die Funktion $\nu = (\nu_1, ...\nu_n)^T \in C^\infty(\bar{\Omega})$ so, dass $\nu(x)$ für $x \in \partial\Omega$ der Einheitsnormalen entspricht. Die Existenz einer solchen Funktion zeigt man analog zur Existenz der Funktionen U_k, wobei man dabei auch ausnutzt, dass Ω für alle $r \in \mathbb{N}$ die C^r-Regularitätseigenschaft besitzt.

Lemma 3.11

Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass die Anfangsrandwertaufgaben

$$L_k u^k = F_k \quad \text{in} \quad [0,T]\times\Omega, \tag{3.33}$$

$$u^k(0,\cdot) = f_k \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{3.34}$$

$$Mu^k = 0 \quad \text{in} \quad [0,T]\times\partial\Omega \tag{3.35}$$

für alle $k \geq k_0$ die Bedingungen von Satz 3.1 erfüllen.

Beweis: Die Bedingungen (i)-(v) sind offensichtlich nach Konstruktion erfüllt.
Um (vi) zu zeigen sei $h \in \mathbb{R}^l$ beliebig. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dem Sobolevschen Einbettungssatz und (3.31) erhalten wir

$$\begin{aligned} h^T A_k^0 h = h^T A^0 h + h^T \left(A_k^0 - A^0\right) h &\geq c_{A^0}|h|^2 - |h| \left|\left(A_k^0 - A^0\right) h\right| \\ \geq \ c_{A^0}|h|^2 - \left\|\left(A_k^0 - A^0\right)\right\|_{C^0} |h^2| &\geq \left(c_{A^0} - \frac{d}{k^2}\right) |h|^2 \end{aligned}$$

mit $d = d(\Omega, s) > 0$. Für $k > \sqrt{\frac{d}{c_{A^0}}}$ ist $c_{A_k^0} := c_{A^0} - \frac{d}{k^2} > 0$ und damit die Voraussetzung (vi) erfüllt.
Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\tilde{A}_k^\nu := \sum_{j=1}^n (A_k^j + \frac{1}{k^2}\nu^j Id)\nu^j = A_k^\nu + \frac{1}{k^2} Id$ die Randmatrix zu L_k.
In $[0,T] \times \partial\Omega$ gilt daher mit (3.32)

$$\|\tilde{A}_k^\nu - A^\nu\|_{op} \leq \|\tilde{A}_k^\nu - A_k^\nu\|_{op} + \|A_k^\nu - A^\nu\|_{op} \leq \frac{2}{k^2} \leq \frac{1}{c_{A^\nu}}$$

für $k > \sqrt{2c_{A^\nu}} =: k_0$, so dass aus Satz 3.8 in [2] die Invertierbarkeit von $\tilde{A}_k^\nu$ in $[0,T] \times \partial\Omega$ für $k \geq k_0$ folgt.
Wegen $\tilde{A}_k^\nu = A^\nu \left(Id - \left(Id - (A^\nu)^{-1}\tilde{A}_k^\nu\right)\right)$ und

$$\|Id - (A^\nu)^{-1}\tilde{A}_k^\nu\|_{op} \leq \|(A^\nu)^{-1}\|_{op}\|A^\nu - \tilde{A}_k^\nu\|_{op} \leq \frac{2c_{A^\nu}}{k^2} < 1$$

für $k \geq k_0$ ist der Satz zur Neumann-Reihe[3] anwendbar und liefert $\| \left(\tilde{A}_k^\nu\right)^{-1} \|_{op} < \frac{c_{A^\nu}k^2}{k^2 - 2c_{A^\nu}} =: c_{\tilde{A}_k^\nu}$, womit Voraussetzung (vii) erfüllt ist.
Um (viii) zu zeigen, wählen wir zu jedem $w \in ker(M)^T$ mit $|w| = 1$ ein $z_w \in ker(M)$ so, dass die Ungleichung

$$(w + z_w)^T A^\nu (w + z_w) < -c_{z_w}|w + z_w|^2 \quad \text{für ein} \quad c_{z_w} > 0$$

gilt und c_{z_w} mit dieser Eigenschaft maximal ist. Aufgrund der maximalen Nichtnegativität der Randbedingung des Ursprungssystems ist dies möglich. Deshalb und aufgrund der Tatsache, dass orthogonale Komplemente abgeschlossen sind, gibt es außerdem ein $c > 0$ mit $c_w \geq c$ für alle $w \in ker(M)^T$.
Wir nehmen nun an, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen Unterraum $\ker(M) \subsetneq U^k \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $h^T \tilde{A}_k^\nu h \geq 0$ für alle $h \in U^k$. Dann gibt es, wie eben gezeigt, ein $w^k \in ker(M)^T$ und ein zugehöriges $z_{w^k} \in ker(M)$, so dass

$$\left(w^k + z_{w^k}\right)^T A^\nu \left(w^k + z_{w^k}\right) < -c|w^k + z_{w^k}|^2,$$

[3] [2], Satz 3.7

aber gleichzeitig auch

$$\left(w^k + z_{w^k}\right)^T \tilde{A}_k^\nu \left(w^k + z_{w^k}\right) \geq 0$$

gilt. Daraus folgt nun

$$\left(w^k + z_{w^k}\right)^T \left(A_k^\nu - A^\nu\right) \left(w^k + z_{w^k}\right) \geq \left(c - \frac{1}{k^2}\right) |w^k + z_{w^k}|^2,$$

was für $k > \sqrt{\frac{2}{c}}$ einen Widerspruch zu (3.32) darstellt und somit zeigt, dass (viii) erfüllt ist.
Eigenschaft (ix) gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, da die f_k^p zum System (3.33)-(3.35) nach Konstruktion identisch mit den f_k^p zum System $Lu^k = \tilde{F}_k$, $u^k(0,\cdot) = f_k$, $Mu^k = 0$ in $\partial\Omega$ sind und somit nach Wahl der Folgen $\left(\tilde{F}_k\right)_k$ und $(f_k)_k$ (ix) folgt.
Mit $k_0 := \max\left\{\sqrt{2c_{A^\nu}}, \sqrt{\frac{d}{c_{A^0}}}, \sqrt{\frac{2}{c}}\right\}$ ist Lemma 3.11 bewiesen. □

Da die L_k glatt sind, gibt es, wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, für $k \geq k_0$ eindeutige Lösungen $u^k \in X_m\left([0,T] \times \Omega\right)$ zu den zugehörigen Systemen (3.33)-(3.35), für die die entsprechenden Abschätzungen (3.4)-(3.7) gelten.
Ziel ist es im Folgenden zu zeigen, dass die Folge der Lösungen $(u^k)_k$ in X_m gegen eine Funktion u konvergiert und von dieser zu zeigen, dass sie die eindeutige Lösung zu (3.1)-(3.3) ist.

Lemma 3.12
Die Folge der Lösungen $\left(u^k\right)_k \subset X_m\left([0,T], \Omega\right)$ zu den jeweiligen Systemen (3.33)-(3.35) ist eine Cauchyfolge in $C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$.

Beweis: Zur übersichtlicheren Darstellung teilen wir den Beweis in mehrere Einzelbehauptungen auf.

Behauptung 3.13
Die Folge $(F_k)_k$ konvergiert in $H^m([0,T] \times \Omega)$ gegen F.

Beweis: Nach Konstruktion gilt mit (3.22), (3.27) und Lemma B.6

$$\begin{aligned}
\|F_k - F\|_{H^m} &\leq \|F_k - \tilde{F}_k\|_{H^m} + \|\tilde{F}_k - F\|_{H^m} \\
&\leq \left\|(A_k^0 - A^0)\partial_t U_k + \left(A_k^j + \frac{1}{k^2}\nu^j Id - A^j\right)\partial_j U_k + (B_k - B)U^k\right\|_{H^m} + \|\tilde{F}_k - F\|_{H^m} \\
&\leq \left(|||A_k^0 - A^0, A_k^j - A^j, B_k - B|||_s + \frac{c_\nu}{k^2}\right)\|U_k\|_{H^{m+1}} + \|\tilde{F}_k - F\|_{H^m} \\
&\leq \frac{(1 + c_\nu)c_3}{k} + \|\tilde{F}_k - F\|_{H^m} \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad k \to \infty.
\end{aligned}$$

(□)

Behauptung 3.14
Es gibt ein $C > 0$, so dass $|||u^k|||_{m,T} \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis: Aus der Konvergenz von $(F_k)_k$ folgern wir die Existenz einer Konstanten $c_4 > 0$ mit $\|F_k\|^2_{H^m([0,T]\times\Omega)} \le c_4$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass mit (3.30) aus Abschätzung (3.4)

$$\begin{aligned}|||u^k(t)|||^2_{m-1} + |||u^k(t)|||^2_{m,tan} &\le d_1^{(k)} e^{d_2^{(k)} t} \cdot \left(|||u_k(0)|||^2_{m-1} + |||u_k(0)|||^2_{m,tan}\right) \\ &+ d_1^{(k)} e^{d_2^{(k)} t} d_3^{(k)} \|F_k\|^2_{H^m([0,T]\times\Omega)} \le d_1^{(k)} e^{d_2^{(k)} T}\left(2c_2 + d_3^{(k)} c_4\right)\end{aligned}$$

folgt. Der Sobolevsche Einbettungssatz[4] liefert ein $d > 0$, so dass nach Einsetzen in (3.5)

$$|||u^k(t)|||^2_m \quad \le \quad 3\left(d_4^{(k)}(1 + |||A_k^0, \tilde{A}_k^j|||^a_{s,T})\right)^2 \cdot \left\{dc_4 + d_1^{(k)} e^{d_2^{(k)} T}(2c_2 + d_3^{(k)} c_4)\right\}$$

gilt.
Aus (3.31) folgt die Existenz einer Konstanten $c_5 > 0$ mit $|||A_k^0, A_k^j, B^k|||_{s,T} \le c_5$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit sind aufgrund der Stetigkeit der $d_i^{(k)}$ auch die Folgen $\left(d_i^{(k)}\right)_k$ für $1 \le i \le 4$ beschränkt, so dass die Behauptung aus der obigen Abschätzung folgt. $(\square)$

Es gilt

$$L(u^k - u^l) = F_k - F_l + (L - L_k)u^k - (L - L_l)u^l.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit $2\left(u^k - u^l\right)$, integrieren über Ω, integrieren partiell und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\langle u^k - u^l, A^0(u^k - u^l)\right\rangle &= \left\langle u^k - u^l, \partial_t A^0(u^k - u^l)\right\rangle + 2\left\langle u^k - u^l, F_k - F_l\right\rangle \\ &- \int_\Omega \frac{d}{dx_j}(u^k - u^l)^T A^j(u^k - u^l) + \left\langle u^k - u^l, \partial_j A^j(u^k - u^l) - 2B(u^k - u^l)\right\rangle \\ &+ 2\left\langle u^k - u^l, (A^0 - A_k^0)\partial_t u^k + (A^j - \tilde{A}_k^j)\partial_j u^k + (B - B_k)u^k\right\rangle \\ &- 2\left\langle u^k - u^l, (A^0 - A_l^0)\partial_t u^l + (A^j - \tilde{A}_l^j)\partial_j u^l + (B - B_l)u^l\right\rangle.\end{aligned}$$

Indem wir, wie schon in den Rechnungen auf Seite 76, ausnutzen, dass die Randmatrix A^ν auf dem Nullraum von M positiv definit ist, ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\langle u^k - u^l, A^0(u^k - u^l)\right\rangle \\ &\quad\le\ 2\|u^k - u^l\|^2_{L^2} \cdot |||A^0, A^j, B|||_s + 2\|u^k - u^l\|_{L^2}\|F_k - F_l\|_{L^2} \\ &\qquad + 2\|u^k - u^l\|_{L^2}|||(A^0 - A_k^0), (A^j - \tilde{A}_k^j), (B - B_k)|||_{s-1}|||u^k|||_1 \\ &\qquad + 2\|u^k - u^l\|_{L^2}|||(A^0 - A_l^0), (A^j - \tilde{A}_l^j), (B - B_l)|||_{s-1}|||u^l|||_1 \\ &\le 2\|u^k - u^l\|^2_{L^2} \cdot |||A^0, A^j, B|||_s + 4C\|F_k - F_l\|_{L^2} + 8C^2(1 + c_\nu)\left(\min\{k^2, l^2\}\right)^{-1}\end{aligned}$$

[4] [1], Theorem 4.12

Mit (3.21), $u^k(0) = f_k$ und dem Lemma von Gronwall, Satz 1.3, folgt daraus für alle $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
&c_{A^0}\|(u^k - u^l)(t)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \; e^{2|||A^0,A^j,B|||_s T} \cdot \left(|||A^0|||_{s-1,T}\|f_k - f_l\|_{L^2}^2 + 4C\|F_k - F_l\|_{L^2} + 8C^2(1+c_\nu)\left(\min\{k^2,l^2\}\right)^{-1} \right).
\end{aligned}
$$

Unter Beachtung von (3.23) und Behauptung 3.13 ist Lemma 3.12 damit bewiesen. □

Es sei $u := \lim_{k\to\infty} u^k$ in $C^0\left([0,T], L^2\right)$.

Lemma 3.15
Für $m > 1$ löst u die Gleichung $Lu = F$ in $C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ und für $0 \leq i \leq m-1$ gilt mit $0 < \delta \leq m - i$

$$
(3.36) \qquad \left(u^k\right)_k \longrightarrow u \quad \text{in} \quad C^i\left([0,T], H^{m-i-\delta}(\Omega)\right)
$$

und

$$
(3.37) \qquad \partial_t^i u \in L^\infty\left([0,T], H^{m-i}\right) \quad \text{mit} \quad \|\partial_t^i u\|_{L^\infty([0,T],H^{m-i})} \leq C.
$$

Beweis: Die Ungleichung von Gagliardo und Nirenberg[5] liefert ein $K = K(\Omega, m)$, so dass für alle $0 \leq \delta \leq m$ und alle $t \in [0,T]$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\|u^k(t) - u^l(t)\|_{H^{m-\delta}} &\leq K\|u^k(t) - u^l(t)\|_{L^2}^{\frac{\delta}{m}}\|u^k(t) - u^l(t)\|_{H^m}^{1-\frac{\delta}{m}} \\
&\leq (2C)^{1-\frac{\delta}{m}}K\|u^k(t) - u^l(t)\|_{L^2}^{\frac{\delta}{m}} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

gilt. Daraus folgt wegen $u^k \longrightarrow u$ in $C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ auch $u^k \longrightarrow u$ in $C^0([0,T], H^{m-\delta}(\Omega))$ und somit ist (3.36) für $i = 0$ gezeigt.
Aus $\|(L - L_k)u^k\|_{L^2} \leq |||A^0 - A_k^0, A^j - \tilde{A}_k^j, B - B_k|||_{s-1}|||u^k|||_1 \leq \frac{(1+c_\nu)C}{k^2}$ folgt

$$
Lu^k = F_k + (L - L_k)u^k \longrightarrow F \quad \text{in} \quad C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)
$$

und somit

$$
\lim_{k\to\infty} \partial_t u^k = \lim_{k\to\infty} \left(A^0\right)^{-1}\left(F - A^j\partial_j u^k - Bu^k\right) \quad \text{in} \quad C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right).
$$

Für $m \geq 2$ gilt, wie eben gezeigt, insbesondere auch $u^k \longrightarrow u$ in $C^0([0,T], H^{m-1}(\Omega)) \subset C^0([0,T], H^1(\Omega))$, so dass

$$
\partial_t u^k \longrightarrow \left(A^0\right)^{-1}\left(F - A^j\partial_j u - Bu\right) =: u_{(t)} \quad \text{in} \quad C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)
$$

folgt.

[5] [1], Theorem 5.2 (3)

Damit ist gezeigt, dass $u \in C^0([0,T], H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$ mit $\partial_t u = u_{(t)}$ gilt und $(u_k)_k$ in diesem Raum gegen u konvergiert.
Offensichtlich ist u in $C^0([0,T], L^2(\Omega))$ somit Lösung der Gleichung $Lu = F$.
Wieder liefert die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung eine Konstante $K = K(\Omega, m-1)$, so dass

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u^k - \partial_t u^l\|_{H^{m-1-\delta}} &\leq K\|\partial_t u^k(t) - \partial_t u^l(t)\|_{L^2}^{\frac{\delta}{m-1}} \|\partial_t u^k(t) - \partial_t u^l(t)\|_{H^{m-1}}^{1-\frac{\delta}{m-1}} \\
&\leq K\|\partial_t u^k(t) - \partial_t u^l(t)\|_{L^2}^{\frac{\delta}{m-1}} (2C)^{1-\frac{\delta}{m-1}}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

gilt. Aus den Gleichungen $L_k u^k = F_k$ und $L_l u^l = F_l$ folgt

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u^k - \partial_t u^l\|_{L^2} \leq\ & \| \left(\left(A_k^0\right)^{-1} - \left(A_l^0\right)^{-1} \right) \left(F_k - \tilde{A}_k^j \partial_j u^k - B_k u^k \right) \|_{L^2} \\
& + \| \left(A_l^0\right)^{-1} \left(\left(F_k - \tilde{A}_k^j \partial_j u^k - B_k u^k \right) - \left(F_l - \tilde{A}_l^j \partial_j u^l - B_l u^l \right) \right) \|_{L^2} \\
\leq\ & ||| \left(A_k^0\right)^{-1} - \left(A_l^0\right)^{-1} |||_{s-1} \left(\|F_k\|_{L^2} + \|\tilde{A}_k^j \partial_j u^k\|_{L^2} + \|B_k u^k\|_{L^2} \right) \\
& + \frac{1}{c_{A_l^0}} \left(\|F_k - F_l\|_{L^2} + \| \left(\tilde{A}_l^j - \tilde{A}_k^j \right) \partial_j u^k \|_{L^2} + \| \left(B_l - B_k\right) u^k \|_{L^2} \right) \\
& + \frac{1}{c_{A_l^0}} \left(\|\tilde{A}_l^j \left(\partial_j u^l - \partial_j u^k \right) \|_{L^2} + \|B_l \left(u^l - u^k \right) \|_{L^2} \right) \\
\leq\ & ||| \left(A_k^0\right)^{-1} - \left(A_l^0\right)^{-1} |||_{s-1,T} \left(dc_4 + (c_5 + \frac{c_\nu}{k^2}) \|u\|_{H^1} \right) + \frac{d}{c_{A_l^0}} \|F_k - F_l\|_{H^m([0,T]\times\Omega)} \\
& + \frac{1}{c_{A_l^0}} \left(|||\tilde{A}_l^j - \tilde{A}_k^j, B_l - B_k|||_{s-1,T} \|u^k\|_{H^1} + (c_5 + \frac{c_\nu}{k^2}) \|u^l - u^k\|_{H^1} \right),
\end{aligned}$$

wobei d die entsprechende Sobolevkonstante sei.
Damit gilt $\|\partial_t u^k(t) - \partial_t u^l(t)\|_{L^2} \longrightarrow 0$ für $t \in [0,T]$ und eingesetzt in (3.38) folgt daraus, dass $\left(u^k\right)_k$ in $C^1\left([0,T], H^{m-1-\delta}\right)$ eine Cauchyfolge ist.
Aus $u^k \longrightarrow u$ in $C^1([0,T], L^2)$ folgt somit auch $u^k \longrightarrow u$ in $C^1\left([0,T], H^{m-1-\delta}\right)$ und $u \in C^1\left([0,T], H^{m-1-\delta}\right)$, womit (3.36) auch für $i = 1$ gezeigt ist.
Induktiv erhalten wir durch analoges Vorgehen ebenfalls $u^k \longrightarrow u$ in $C^i([0,T], H^{m-i-\delta}(\Omega))$ für $2 \leq i \leq m-1$.

Um (3.37) zu zeigen gehen wir analog zu [12], Seite 71, vor. Es seien dazu $0 \leq i \leq m-1$ und $t \in [0,T]$.
Aus Behauptung 3.14 folgt $\|\partial_t^i u^k(t)\|_{H^{m-i}} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Theorem 1.18 in [1] liefert uns daher eine in $H^{m-i}(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge von $\left(\partial_t^i u^k(t)\right)_k$, die wir wieder $\left(\partial_t^i u^k(t)\right)_k$ nennen, und eine Funktion $g_{t,i} \in H^{m-i}(\Omega)$, so dass für $k \to \infty$ und alle $\varphi \in H^{m-i}(\Omega)$

$$\left\langle \partial_t^i u_k(t), \varphi \right\rangle_{H^{m-i}} \longrightarrow \left\langle g_{t,i}, \varphi \right\rangle_{H^{m-i}} \tag{3.39}$$

gilt. Aus (3.39) folgt insbesondere

$$\|g_{t,i}\|_{H^{m-i}} \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \|\partial_t^i u^k(t)\|_{H^{m-i}} \leq C. \tag{3.40}$$

Für beliebiges $h \in L^2$ ist die Abbildung $g \mapsto \langle g, h\rangle_{L^2}$ für $g \in H^{m-i}(\Omega)$ ein lineares Funktional auf $H^{m-i}(\Omega)$. Der Rieszsche Darstellungssatz[6] liefert uns daher zu h ein $\varphi_h \in H^{m-i}(\Omega)$, so dass für alle $g \in H^{m-i}(\Omega)$

$$\langle g, h\rangle_{L^2} = \langle g, \varphi_h\rangle_{H^{m-i}}$$

gilt. Mit (3.39) folgt daraus

$$\begin{aligned} \langle g_{t,i}, h\rangle_{L^2} &= \langle g_{t,i}, \varphi_h\rangle_{H^{m-i}} = \lim_{k\to\infty} \left\langle \partial_t^i u^k(t), \varphi_h \right\rangle_{H^{m-i}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left\langle \partial_t^i u^k(t), h \right\rangle_{L^2} = \left\langle \partial_t^i u(t), h \right\rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

da wegen (3.36) $\lim_{k\to\infty} \partial_t^i u^k(t) = \partial_t^i u(t)$ in $H^{m-i-1}(\Omega)$ gilt.
Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt daraus $\partial_t^i u(t) = g_{t,i}$ in L^2 und damit aus (3.40) $\partial_t^i u \in L^\infty([0,T], H^{m-i})$ und $\|\partial_t^i u\|_{L^\infty([0,T],H^{m-i})} \leq C$, womit Lemma 3.15 bewiesen ist. □

Mit den Aussagen von Lemma 3.15 können wir nun zeigen, dass die Abbildung

$$t \longmapsto |||u(t)|||_m^2 \tag{3.41}$$

in $[0,T]$ stetig ist.
Wir reduzieren das Problem dazu wieder, wie in Abschnitt 3.1.1 vorgeführt, auf die Fälle

(i) $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, |x| < 1\}$ mit $\partial\Omega \cap supp(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0, |x| < 1\}$ und einer konstanten „Randbedingungsmatrix“ M.

(ii) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit $\partial\Omega \cap supp(u) = \emptyset$.

Da im Fall (ii) keine Ableitungen mit Anteilen in Richtung der Normalen zu $\partial\Omega$ auftreten, ist der Beweis in diesem Fall unproblematischer als in Fall (i) und wird deshalb nicht vorgeführt. Das Vorgehen ist allerdings dasselbe, wie das im Beweis zum nächsten Lemma, das den ersten Schritt zum Beweis der Stetigkeit der Abbildung (3.41) darstellt.

Lemma 3.16
Es seien $0 \leq i \leq m-1$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex mit

$$|\alpha| + i \leq m-1 \qquad \text{oder} \qquad |\alpha| + i = m, \quad \alpha_n = 0.$$

[6] [15], Theorem 6.51

Dann gilt

$$D^\alpha \partial_t^i u \in C^0\left([0,T], H^{m-i-|\alpha|}(\Omega)\right).$$

Beweis: Auch in diesem Beweis gehen wir analog zu [12], Seite 72-75, vor.
Es seien i und α so, dass die Voraussetzungen von Lemma 3.16 erfüllt sind und $t_0 \in [0,T]$.
Um zu zeigen, dass $\lim_{t\to t_0} D^\alpha \partial_t^i u(t) = D^\alpha \partial_t^i u(t_0)$ in $L^2(\Omega)$ gilt, nutzen wir die folgende Äquivalenz:

Sei H ein Hilbertraum. Dann folgt aus $h_n \rightharpoonup h$ in H

$$h_n \to h \quad \text{in} \quad H \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\lim_n} \|h_n\|_H \leq \|h\|_H, \tag{3.42}$$

wobei $\rightharpoonup$ die schwache Konvergenz bezeichne.
Wir teilen den Beweis wieder in Einzelbehauptungen auf.

Behauptung 3.17
Für $t \to t_0$ konvergiert $\partial_t^i u(t)$ in $H^{m-i}(\Omega)$ schwach gegen $\partial_t^i u(t_0)$.

Beweis: Sei $(t_n)_n \subset [0,T]$ mit $t_n \to t_0$ für $n \to \infty$.
Wegen (3.37) gilt $\|\partial_t^i u(t_n)\|_{H^{m-i}} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog zum Beweis zu (3.37) folgt daraus die Existenz einer Funktion $g_{t_0,i} \in H^{m-i}(\Omega)$ und einer Teilfolge von $(\partial_t^i u(t_n))_n$, die wieder $(\partial_t^i u(t_n))_n$ genannt wird, mit

$$\left\langle \partial_t^i u(t_n), \varphi \right\rangle_{H^{m-i}} \longrightarrow \langle g_{t_0,i}, \varphi \rangle_{H^{m-i}}$$

für $n \to \infty$ und alle $\varphi \in H^{m-i}(\Omega)$.
Daraus folgt unter Berücksichtigung von (3.36) ebenso wie oben, dass $\partial_t^i u(t_0) = g_{t_0,i}$ und die Funktion $\partial_t^i u$ im Punkt t_0 somit *schwach stetig* in $H^{m-i}(\Omega)$ ist. $(\Box)$

Mit (3.42) und Behauptung 3.17 folgt $\lim_{t\to t_0} \|D^\alpha \partial_t^i u(t) - D^\alpha \partial_t^i u(t_0)\|_{L^2} = 0$ aus

$$\overline{\lim_{t\to t_0}} \|D^\alpha \partial_t^i u(t)\|_{L^2} \leq \|D^\alpha \partial_t^i u(t_0)\|_{L^2}. \tag{3.43}$$

Die Begründungen auf Seite 73 in [12] erlauben es uns außerdem (3.43) auch in unserem Fall aus der Abschätzung

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}} \|D^\alpha \partial_t^i u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|D^\alpha \partial_t^i u(0)\|_{L^2}^2 \tag{3.44}$$

zu folgern.
Um zu beweisen, dass (3.44) gilt, definieren wir für $h \in L^2(\Omega)$ und $t \in [0,T]$

$$\|h\|_{A^0(t)}^2 := \left\langle h, A^0(t) h \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Da $A^0(t)$ für alle $t \in [0,T]$ positiv definit ist, ist $\|\cdot\|_{A^0(t)}$ für alle $t \in [0,T]$ eine Norm in $L^2(\Omega)$ und wegen (3.21) äquivalent zu $\|\cdot\|_{L^2}$.
Somit genügt es

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\|D^\alpha\partial_t^i u(t)\|^2_{A^0(0)} \leq \|D^\alpha\partial_t^i u(0)\|^2_{A^0(0)}$$

anstelle von (3.44) zu zeigen und wegen

$$\begin{aligned} \left|\|h\|^2_{A^0(t)} - \|h\|^2_{A^0(0)}\right| &\leq \left\|A^0(t) - A^0(0)\right\|_{C^0}\|h\|^2_{L^2} \\ &\leq d|||A^0(t) - A^0(0)|||_{s-1}\|h\|^2_{L^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad t\downarrow 0 \end{aligned}$$

genügt es sogar die Abschätzung

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\|D^\alpha\partial_t^i u(t)\|^2_{A^0(t)} \leq \|D^\alpha\partial_t^i u(0)\|^2_{A^0(0)} \tag{3.45}$$

zu zeigen, die wiederum direkt aus der nächsten Behauptung[7] folgt.

Behauptung 3.18
Es gibt eine Funktion $g \in L^1((0,T))$, so dass für alle $t \in [0,T]$

$$\|D^\alpha\partial_t^i u(t)\|^2_{A^0(t)} \leq \|D^\alpha\partial_t^i u(0)\|^2_{A^0(0)} + \int_0^t |g(s)|\,\mathrm{d}s$$

gilt.

Beweis: Aus Abschätzung (3.15) in Lemma 3.7 folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^\alpha\partial_t^i u^k(t)\|^2_{A^0_k(t)} \leq \Gamma_3^{(k)}\cdot|||u^k(t)|||^2_m + |||F_k(t)|||^2_m,$$

mit $\Gamma_3^{(k)} := \Gamma_3\left(|||A^0_k, \tilde{A}^j_k, B_k|||_{s,T}\right)$ und daraus nach Intergration über $(0,t)$ unter Beachtung der Beschränktheit der u^k

$$\|D^\alpha\partial_t^i u^k(t)\|^2_{A^0_k(t)} \leq \|D^\alpha\partial_t^i u^k(0)\|^2_{A^0_k(0)} + \Gamma_3^{(k)}\int_0^t C + |||F_k(s)|||^2_m\,\mathrm{d}s. \tag{3.46}$$

Da nach Konstruktion $\lim_{k\to\infty}\|\partial_t^i u^k(0) - \partial_t^i u(0)\|_{H^{m-i}(\Omega)} = 0$ ist, gilt außerdem

$$\begin{aligned} \left|\|D^\alpha\partial_t^i u^k(0)\|^2_{A^0_k(0)} - \|D^\alpha\partial_t^i u(0)\|^2_{A^0(0)}\right| &\leq \left|\left\langle D^\alpha\partial_t^i u^k(0) - D^\alpha\partial_t^i u(0), A^0_k(0)D^\alpha\partial_t^i u^k(0)\right\rangle\right| \\ &+ \left|\left\langle D^\alpha\partial_t^i u(0), \left(A^0_k(0) - A^0(0)\right)D^\alpha\partial_t^i u^k(0)\right\rangle\right| \\ &+ \left|\left\langle D^\alpha\partial_t^i u(0), A^0(0)\left(D^\alpha\partial_t^i u^k(0) - D^\alpha\partial_t^i u(0)\right)\right\rangle\right| \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad k\to\infty. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Aus (3.46) und (3.47) zusammen mit der schwachen Konvergenz von $\left(\partial_t^i u^k(t)\right)_k$ in $H^{m-i}(\Omega)$

[7] siehe auch [9], Seite 44/45

und $|||A^0(t) - A^0_k(t)|||_{s-1} \to 0$ folgt nun

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \partial_t^i u(t)\|^2_{A^0(t)} &\leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \|D^\alpha \partial_t^i u^k(t)\|^2_{A^0_k(t)} \\ &\leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\|D^\alpha \partial_t^i u^k(0)\|^2_{A^0_k(0)} + \Gamma_3^{(k)} \int_0^t C + |||F_k(s)|||^2_m \,\mathrm{d}s \right) \\ &= \|D^\alpha \partial_t^i u(0)\|^2_{A^0(0)} + \Gamma_3 \int_0^t C + |||F(s)|||^2_m \,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

womit Behauptung 3.18 (□)

und damit auch Lemma 3.16 bewiesen ist. □

Für $0 \leq p \leq m-1$ folgt aus $Lu = F$ und $\partial_t^i u \in L^\infty([0,T], H^{m-i}(\Omega))$ für $0 \leq i \leq m-i$

$$\partial_n^{p+1} u = (A^n)^{-1} \left(\partial_n^p \left(F - A^0 \partial_t u - \sum_{j=1}^{n-1} A^j \partial_j u - Bu \right) - \sum_{k=1}^{p} c_{p,k} \partial_n^k A^n \partial_n^{p+1-k} u \right),$$

woraus mit Lemma 3.5, Lemma 3.16 und Lemma B.6 induktiv

$$\partial_n^{p+1} u \in \cap_{i=0}^{m-p-1} C^i \left([0,T], H^{m-i-p-1}(\Omega)\right)$$

folgt. Damit erhalten wir aus

$$\partial_t^m u = \left(A^0\right)^{-1} \left(\partial_t^{m-1} \left(F - A^j \partial_j u - Bu\right) - \sum_{i=1}^{m-1} c_{m,i} \partial_t^i A^0 \partial_t^{m-i} u \right)$$

ebeso $\partial_t^m u \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$.
Nach Rücktransformation auf das Ursprungsgebiet Ω folgt insgesamt die Stetigkeit der Abbildung

$$t \longmapsto |||u(t)|||^2_m \qquad \text{in} \quad [0,T]$$

und somit $u \in X_m([0,T], \Omega)$, womit Satz 3.1 bewiesen ist.

In den Beweisen zu den Abschätzungen (3.5) und (3.7) in Satz 3.2, die in Abschnitt 3.1.1 für glatte Operatoren L vorgeführt wurden, wurde die zusätzliche Regularität der Operatoren nicht explizit ausgenutzt. (3.5) und (3.7) gelten somit auch hier für die Lösung u.
Die Beweise zu den Abschätzungen (3.4) und (3.6) können dagegen nicht problemlos auf den Fall nicht-glatter Operatoren übertragen werden.
Um (3.4) zu zeigen, genügt es aber zu zeigen, dass

$$\|D^\alpha u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \|D^\alpha u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{für alle} \quad |\alpha| \leq m \quad \text{und} \quad t \in [0,T] \tag{3.48}$$

gilt.

Mit der Abschätzung (3.4) für die u_k folgt daraus nämlich für alle $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
&|||u(t)|||_{m-1}^2 + |||u(t)|||_{m,tan}^2 \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(|||u_k(t)|||_{m-1}^2 + |||u_k(t)|||_{m,tan}^2\right) \\
+ \quad &\overline{\lim_{k\to\infty}} \left(d_1^{(k)} e^{d_2^{(k)} t} \cdot \left(|||u_k(0)|||_{m-1}^2 + |||u_k(0)|||_{m,tan}^2 + d_3^{(k)} \int_0^t e^{-d_2^{(k)}\tau} |||F_k(t)|||_m^2 \, \mathrm{d}\tau \right) \right).
\end{aligned}
$$

Aus der Stetigkeit der d_i, (3.22), (3.23), (3.31), (3.32) und Behauptung 3.13 folgt aus dieser Abschätzung direkt (3.4) für u.
(3.6) erhält man für u analog.
Um (3.48) zu beweisen nutzen wir aus, dass im Beweis zu (3.37) in Lemma 3.15 schon gezeigt wurde, dass $\left(\partial_t^i u_k(t)\right)_k$ für $0 \leq i \leq m-1$ und $t \in [0,T]$ in $H^{m-i}(\Omega)$ schwach gegen $\partial_t^i u(t)$ konvergiert, woraus (3.48) für $|\alpha| \leq m$ und $\alpha_0 \leq m-1$ direkt folgt.
Außerdem folgt daraus für $\varphi \in L^2(\Omega)$, $t \in [0,T]$ und $k \longrightarrow \infty$

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_t^m u_k(t), \varphi \rangle_{L^2} &= \left\langle \left(A_k^0\right)^{-1} \left(\partial_t^{m-1} \left(F_k - A_k^j \partial_j u_k - B_k u_k\right) - \sum_{i=1}^{m-1} c_{m,i} \partial_t^i A_k^0 \partial_t^{m-i} u_k\right), \varphi \right\rangle_{L^2} \\
\longrightarrow \quad &\left\langle \left(A^0\right)^{-1} \left(\partial_t^{m-1} \left(F - A^j \partial_j u - Bu\right) - \sum_{i=1}^{m-1} c_{m,i} \partial_t^i A^0 \partial_t^{m-i} u\right), \varphi \right\rangle_{L^2} = \langle \partial_t^m u(t), \varphi \rangle_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Somit konvergiert auch $\left(\partial_t^m u_k(t)\right)_k$ schwach gegen $\partial_t^m u(t)$ in $L^2(\Omega)$ und es gilt deshalb $\|\partial_t^m u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \|\partial_t^m u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}$.
Damit ist gezeigt, dass Satz 3.2 auch für Operatoren mit der in Satz 3.1 geforderten Regularität gilt.

3.2 Existenzsatz für nichtlineare Systeme

Wir werden nun Satz 1.6 unter Verwendung der Ergebnisse des vorherigen Abschnittes beweisen.
Dazu verwenden wir die folgenden drei Lemmata, die im Anschluss bewiesen werden.

Lemma 3.19
Die Menge

$$X = \left\{ v \in X_m\left([0,T_0],\Omega\right) : Mv = 0 \quad \text{in} \quad \partial\Omega \quad \text{und} \quad \partial_t^i v(0,\cdot) =' \partial_t^i u(0,\cdot)' \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq m \right\}$$

ist nicht leer.

Mit Hilfe des linearen Existenzsatzes definieren wir eine Abbildung

$$S : X \cap X_{\varepsilon_0} \longrightarrow X_m\left([0,T_0],\Omega\right)$$

mit $X_{\varepsilon_0} := \left\{ v \in X_m\left([0,T_0],\Omega\right) : \|v(t,\cdot) - f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon_0 \quad \text{in} \quad [0,T_0] \right\}$ durch

$$S(v) = w$$

genau dann, wenn w die nach Satz 3.1 eindeutige Lösung zu

$$\begin{aligned} L(v)w &= F && \text{in} \quad [0,T_0] \times \Omega, \\ w(0,\cdot) &= f && \text{in} \quad \Omega, \\ Mw &= 0 && \text{in} \quad [0,T_0] \times \partial\Omega \end{aligned}$$

ist. Es ist dabei zu bemerken, dass der Operator $L(v)$ für $v \in X \cap X_{\varepsilon_0}$ aufgrund der Aussage in Lemma B.7 die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt.

Lemma 3.20
Es gibt ein $R_0 > 0$, eine Funktion $g : [R_0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{R\to\infty} g(R) = \infty$ und zu jedem $R \geq R_0$ ein $T_1 = T_1(R) > 0$, so dass für die Menge

$$\begin{aligned} X_{(R,T_1)} :=& \{ v \in X_m([0,T_1],\Omega) : Mv = 0 \quad \text{in} \quad \partial\Omega, \quad \partial_t^i v(0,\cdot) =' \partial_t^i u(0,\cdot)' \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq m, \\ & \sup_{0 \leq t \leq T_1} \left(|||v|||_{m-1}^2 + |||v|||_{m,tan}^2 \right) \leq R, \quad |||v|||_{m,T_1} \leq g(R) \} \end{aligned}$$

$S\left(X_{(R,T_1)}\right) \subset X_{(R,T_1)}$ gilt, falls R_0 groß genug ist.

Lemma 3.21
Es sei $R \geq R_0$. Dann gibt es ein $T_1 > 0$, so dass die Abbildung $S_{|X_{(R,T_1)}}$ eine Kontraktion bezüglich der X_0-Norm ist.

Um Satz 1.6 zu beweisen wählen wir eine Funktion u_0 aus der Menge X in Lemma 3.19. Dazu wählen wir $R \geq R_0$ aus Lemma 3.20 so groß, dass u_0 in $X_{(R,T_0)}$ liegt und $0 < T \leq T_0$ so klein, dass die Aussagen von Lemma 3.20 und Lemma 3.21 mit R und $T_1 := T$ gelten. Mit Hilfe der Abbildung S können wir damit durch

$$u_k := S\left(u_{k-1}\right) \qquad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$

eine Folge $(u_k)_k \subset X_{(R,T)}$ definieren.
Da $S_{|X_{(R,T)}}$ nach Lemma 3.21 eine Kontraktion in $C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ ist, folgt aus dem Beweis zum Banachschen Fixpunktsatz[8], dass $(u_k)_k$ in $C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ eine Cauchyfolge ist.
Sei $u := \lim_{k\to\infty} u_k \in C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$.

Analog zum Vorgehen auf den Seiten 88-93, wo gezeigt wurde, dass der Grenzwert u der Lösungen $\left(u^k\right)_k$ zu den linearen Systemen in $X_m\left([0,T],\Omega\right)$ liegt, kann auch hier gezeigt werden, dass $u \in X_m\left([0,T],\Omega\right)$ gilt.
Dabei ist beim Beweis zu $u \in \cap_{i=0}^{m-1} C^i\left([0,T],\Omega\right)$ zu beachten, dass $\partial_t^i u_k(0,\cdot) =' \partial_t^i u(0,\cdot)'$ und $|||u_k|||_{m,T} \leq g(R)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt und mit Hilfe von Lemma B.6, Lemma B.7 und dem Hauptsatz der Integralrechnung unter Beachtung von $A \in C^m$ für $A = A^0, A^j, B$ die folgende Abschätzung[9] gezeigt werden kann:
Für $p \leq m-1$ und $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
|||A(u_k) - A(u_l)|||_p &= |||\int_0^1 \nabla A\left(u_l + s(u_k - u_l)\right) \cdot \left(u_k - u_l\right) \mathrm{d}s|||_p \\
&\leq \; |||\int_0^1 \nabla A\left(u_l + s(u_k - u_l)\right) \mathrm{d}s|||_{m-1} \cdot |||u_k - u_l|||_p \\
&\leq \; |||\sup_{s\in[0,1]} \nabla A\left(u_l + s(u_k - u_l)\right)|||_{m-1} \cdot |||u_k - u_l|||_p \\
&\leq \; c\|A\|_{C^m(\Omega\times(|\cdot|\leq c_1 3g(R)))} \cdot \left(1 + \left(2|||u_l|||_{m-1} + |||u_k|||_{m-1}\right)^{m-1}\right) \cdot |||u_k - u_l|||_p.
\end{aligned}$$

Somit ist $\left(A(u_k)\right)_k$ eine Cauchyfolge bezüglich $|||\cdot|||_{p,T}$, falls $(u_k)_k$ in $X_p\left([0,T],\Omega\right)$ konvergiert, wobei die Konvergenz von $(u_k)_k$ in $X_{m-1}\left([0,T],\Omega\right)$, wie auf Seite 88, direkt aus der Ungleichung von Gagliardo und Nirenberg und der Konvergenz in $C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ folgt.
Außerdem sei darauf hingewiesen, dass aus Lemma B.7 und der Beschränktheit von $\left(|||u_k|||_{m,T}\right)_k$ die Beschränktheit von $\left(|||A^0(u_k), A^j(u_k), B(u_k)|||_{m,T}\right)_k$ folgt.
Aus diesen Voraussetzungen folgt, wie im voherigen Abschnitt, dass u in $X_m\left([0,T],\Omega\right)$ liegt und insbesondere die Gleichung $S(u) = u$ erfüllt.
Die Eindeutigkeit der Lösung u folgt ebenfalls aus dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes.

[8] [15], Theorem 9.1
[9] nach [12], Seite 67/68

Beweis zu Lemma 3.19: Wir schreiben A anstelle von A^0, A^j bzw. B. Dann gibt es entsprechende Konstanten $c_{a,b}$ und $c_{k,\beta}$, so dass für $0 \leq i \leq m$

$$\partial_t^i \left[A(u)u\right] = \sum_{a+b=i} c_{a,b} \cdot \partial_t^a \left[A(u)\right] \partial_t^b u$$

und

$$\partial_t^a \left[A(u)\right] = \sum_{\substack{k+p\leq a \\ k+\sum_{i=1}^p \beta_i = a}} c_{k,\beta} \cdot \left(\partial_t^k \partial_u^p A\right)(u) \cdot \partial_t^{\beta_1} u \cdots \partial_t^{\beta_p} u$$

gilt.
Damit können wir $'\left(A^0(u)\partial_t^{i+1}u\right)'_{|\{t=0\}\times\Omega}$ schreiben als

$$'\left(A^0(u)\partial_t^{i+1}u\right)'_{|\{t=0\}\times\Omega} =' \left(\partial_t^i \left(F - A^j(u)\partial_j u - B(u)u\right) - \sum_{\substack{a+b=i \\ b\leq i-1}} c_{a,b} \partial_t^a A^0(u) \partial_t^{b+1} u\right)'_{|\{t=0\}\times\Omega}$$

$$= \; '\left(-\sum_{a+b=i} c_{a,b}\left(\left[\partial_t^a A^j\right](u)\partial_t^b \partial_j u - \left[\partial_t^a B\right](u)\partial_t^b u\right) - \sum_{\substack{a+b=i \\ b\leq i-1}} c_{a,b} \partial_t^a A^0(u) \partial_t^{b+1} u\right)'_{|\{t=0\}\times\Omega}$$

$$+' \left(\partial_t^i F - \sum_{\substack{a+b=i \\ b\leq i-1}} \sum_{\substack{k+p\leq\alpha \\ p\neq 0 \\ k+\sum_{i=1}^p \beta_i = a}} c_{a,b} c_{k,\beta} \cdot \left(\left(\partial_t^k \partial_u^p A^j\right)(u) \cdot \partial_t^{\beta_1} u \cdots \partial_t^{\beta_p} u\right) \partial_t^b \partial_j u\right)'_{|\{t=0\}\times\Omega} \tag{3.49}$$

$$-' \left(\sum_{\substack{a+b=i \\ b\leq i-1}} \sum_{\substack{k+p\leq\alpha \\ p\neq 0 \\ k+\sum_{i=1}^p \beta_i = a}} c_{a,b} c_{k,\beta} \cdot \left(\left(\partial_t^k \partial_u^p B\right)(u) \cdot \partial_t^{\beta_1} u \cdots \partial_t^{\beta_p}\right) \partial_t^b u\right)'_{|\{t=0\}\times\Omega} .$$

Wir definieren nun für $0 \leq i \leq m-1$ Funktionen $G_i \in L^2(\Omega)$ durch

$$G_i \;:=\; '\left(\partial_t^i F - \sum_{\substack{a+b=i \\ b\leq i-1}} \sum_{\substack{k+p\leq\alpha \\ p\neq 0 \\ k+\sum_{i=1}^p \beta_i = a}} c_{a,b} c_{k,\beta} \cdot \left(\left(\partial_t^k \partial_u^p A^j\right)(u) \cdot \partial_t^{\beta_1} u \cdots \partial_t^{\beta_p} u\right) \partial_t^b \partial_j u\right)'_{|\{t=0\}\times\Omega}$$

$$-' \left(\sum_{\substack{a+b=i \\ b\leq i-1}} \sum_{\substack{k+p\leq\alpha \\ p\neq 0 \\ k+\sum_{i=1}^p \beta_i = a}} c_{a,b} c_{k,\beta} \cdot \left(\left(\partial_t^k \partial_u^p B\right)(u) \cdot \partial_t^{\beta_1} u \cdots \partial_t^{\beta_p}\right) \partial_t^b u\right)'_{|\{t=0\}\times\Omega} .$$

Auf gleiche Weise, wie (3.28) bewiesen wurde, kann hier gezeigt werden, dass $(\partial_t^i F)_{|\{t=0\}\times\Omega} \in H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Omega)$ für $1 \leq i \leq m-1$ gilt, woraus mit $f \in H^m(\Omega)$, Lemma B.6 und Lemma B.7 induktiv $'\partial_t^i u(0,\cdot)' \in H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Omega)$ und damit auch $G_i \in H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Omega)$ für $1 \leq i \leq m-1$ folgt.
Daraus können wir ebenso, wie auf Seite 83 die Existenz der Funktionen U_k folgte, die Existenz einer Funktion $G \in H^m\left([0,T]\times\Omega\right)$ mit $\partial_t^i G(0,\cdot) = G_i$ für $0 \leq i \leq m-1$ folgern.

Sei nun v die Lösung der linearen Anfangsrandwertaufgabe

$$L(f)v = G, \qquad v(0,\cdot) = f, \qquad Mv = 0 \quad \text{in} \quad \partial\Omega.$$

Dann können wir mittels Induktion nach i zeigen, dass

$$\partial_t^i v(0,\cdot) =' \partial_t^i u(0,\cdot)' \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq m$$

gilt.

$i=0$: Für $i=0$ ist $\partial_t^0 v(0,\cdot) = f =' \partial_t^0 u(0,\cdot)'$.

$i \rightsquigarrow i+1$: Es gelte $\partial_t^p v(0,\cdot) =' \partial_t^p u(0,\cdot)'$ für $1 \leq p \leq i$.

$$\partial_t^{i+1} v \;=\; \left(A^0(f)\right)^{-1} \partial_t^i \left(G - A^j(f)\partial_j v - B(f)v\right) - \sum_{\substack{a+b=i\\ b\leq i-1}} c_{a,b}\partial_t^a A^0(f)\partial_t^{b+1} v$$

Damit kann man aus der Darstellung (3.49) nach Einsetzen der Induktionsvoraussetzung direkt $\partial_t^{i+1} v(0,\cdot) =' \partial_t^{i+1} u(0,\cdot)'$ ablesen.

Es gilt somit $v \in X$, also $X \neq \emptyset$. □

Beweis zu Lemma 3.20: Analog zur Schreibweise $'\partial_t^i u(0,\cdot)'$ bezeichnen wir mit $'\partial_t^i A(t=0)'$ die formale i-te Ableitung von $A(\cdot,\cdot,u)$ nach t ausgewertet an der Stelle $t=0$ unter der Annahme, dass u das System löst. Die in der Ableitung auftretenden inneren Ableitungen der Form $\partial_t^i u(0,\cdot)$ werden daher durch die formalen Ableitungen $'\partial_t^i u(0,\cdot)'$ ersetzt. Entsprechend sei $|||'A(t=0)'|||_k$ für $0 \leq k \leq m$ definiert.
Mit diesen Bezeichnungen seien nun

$$\begin{aligned} k_1 &:= |||'u(0,\cdot)'|||_{m-1}^2 + |||'u(0,\cdot)'|||_{m,tan}^2 \qquad \text{und} \\ k_2 &:= |||'A^0(t=0)',' A^j(t=0)',' B(t=0)'|||_{m-1}. \end{aligned}$$

Außerdem seien k_3 und k_4 die nach dem Sobolevschen Einbettungssatz existierenden positiven Konstanten mit

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{C^0(\Omega)} &\leq k_3\|\cdot\|_{H^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+1}(\Omega)} \qquad \text{und} \\ |||\cdot(t)|||_{m-1} &\leq k_4|||\cdot|||_{H^m([0,T_0]\times\Omega)}. \end{aligned}$$

Lemma B.7 garantiert uns die Existenz zweier Funktionen G_1, $G_2 : X_m([0,T_0],\Omega) \to \mathbb{R}$, so dass für $k \in \{m-1, m\}$

$$|||A^0(\cdot), A^j(\cdot), B(\cdot)|||_k \leq G_1\left(|||\cdot|||_k\right)$$

und

$$|||A^0(\cdot), A^j(\cdot), B(\cdot)|||_m \leq G_2\left(|||\cdot|||_{m-1}\right)\left(1 + |||\cdot|||_m\right)$$

gilt.
Sei $R_0 := 2d_1\left(\frac{1}{c_{A^0}}, 2k_2\right)\cdot(k_1+1)$ und für $R \geq R_0$

$$\begin{aligned} g(R) \;&:=\; 1 + 2d_4\left(c_{A^\nu}, 2k_2\right)\cdot\left(\sqrt{2R} + k_4\|F\|_{H^m([0,T_0]\times\Omega)}\right) \\ &\quad + \left[4d_4\left(c_{A^\nu}, 2k_2\right)G_2^a\left(\sqrt{R}\right)\cdot\left(\sqrt{2R} + k_4\|F\|_{H^m([0,T_0]\times\Omega)}\right)\right]^{\frac{1}{1-a}}, \end{aligned}$$

wobei $0 < a < 1$ wie in (3.5) sei und die d_i sowohl hier, als auch im Folgenden, für die in Satz 3.2 beschriebenen und von bestimmten Systemeigenschaften abhängigen Konstanten stehen.
Es seien nun $R \geq R_0$ fest und dazu $T_1 = T_1(R) > 0$ midestens so klein, dass

$$T_1 \leq \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{k_3 g(R)}, \quad \frac{k_2}{G_1(g(R))}, \quad \frac{\ln 2}{d_2\left(G_1(g(R)), \frac{1}{c_{A^0}}, c_{A^\nu}\right)}\right\}$$

und

$$d_3\left(G_1(g(R)), c_{A^\nu}\right)\cdot\int_0^{T_1}|||F(t)|||_m^2\,\mathrm{d}t \leq 1$$

gilt.
Sei $v \in X_{(R,T_1)}$ und $0 \leq t \leq T_1$. Dann gilt $v \in C^1([0,T_1]\times\Omega)$ und nach Konstruktion

$$|v(t,x) - f(x)| = \left|\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}v(s,x)\,\mathrm{d}s\right| \leq t\cdot\sup_{0\leq t\leq T_1}\|\partial_t v\|_{C^0(\Omega)} \leq k_3T_1|||v|||_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+2,T_1} \leq \varepsilon_0.$$

Somit ist $w := Sv \in X_m([0,T_1],\Omega)$ wohldefiniert und aufgrund der Gleichungen $\partial_t^i v(0,\cdot) =' \partial_t^i u(0,\cdot)'$ für $0 \leq i \leq m$, $L(v)w = F$ und $w(0,\cdot) = f$ gilt $\partial_t^i w(0,\cdot) =' \partial_t^i u(0,\cdot)'$ für $0 \leq i \leq m$. $Mw = 0$ in $\partial\Omega$ gilt nach Definition von S.

Es muss daher nur noch gezeigt werden, dass

$$|||w(t)|||_{m-1}^2 + |||w(t)|||_{m,tan}^2 \leq R \quad \text{und} \quad |||w|||_{m,T_1} \leq g(R)$$

gilt. Dies wird uns mit Hilfe der Abschätzungen (3.4) und (3.5) in Satz 3.2, die für die Lösung w gelten, gelingen.
Aus $A^0(v) \in X_m([0,T_1],\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned} |||A^0(v)(t)|||_{m-1} &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} |||A^0(v)(s)|||_{m-1}\,\mathrm{d}s + |||A^0(v)(0)|||_{m-1} \\ &\leq t \cdot |||A^0(v)|||_{m,t} + |||'A^0(t=0)'|||_{m-1}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach Wahl von T_1 direkt

$$\begin{aligned} |||A^0(v), A^j(v), B(v)|||_{m-1,T_1} &\leq |||'A^0(t=0)','A^j(t=0)','B(t=0)'|||_{m-1} \\ +T_1|||A^0(v), A^j(v), B(v)|||_{m,T_1} &\leq k_2 + T_1 G_1(g(R)) \leq 2k_2. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt außerdem

$$e^{d_2\left(|||A^0(v),A^j(v),B(v)|||_{m,T_1},\frac{1}{c_{A^0}},c_{A^\nu}\right)t} \leq e^{d_2\left(G_1(g(R)),\frac{1}{c_{A^0}},c_{A^\nu}\right)T_1} \leq 2$$

und

$$\begin{aligned} & d_3\left(|||A^0(v), A^j(v), B(v)|||_{m,T_1}, c_{A^\nu}\right) \int_0^t e^{-d_2 s} |||F(s)|||_m^2\,\mathrm{d}s \\ \leq\; & d_3\left(G_1(g(R)), c_{A^\nu}\right) \cdot \int_0^{T_1} |||F(t)|||_m^2\,\mathrm{d}t \leq 1 \end{aligned}$$

für $t \in [0,T_1]$, so dass man nach Einsetzen in (3.4)

$$|||w(t)|||_{m-1}^2 + |||w(t)|||_{m,tan}^2 \leq 2d_1\left(\frac{1}{c_{A^0}}, 2k_2\right)(k_1+1) = R_0 \leq R$$

erhält. Aus (3.5) folgt damit

$$\begin{aligned} |||w(t)|||_m &\leq d_4\left(c_{A^\nu}, 2k_2\right)\left(1 + G_2^a\left(\sqrt{R}\right)(1+g(R))^a\right) \cdot \left(\sqrt{2R} + k_4\|F\|_{H^m}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot 2d_4\left(c_{A^\nu}, 2k_2\right)\left(\sqrt{2R} + k_4\|F\|_{H^m}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\left[4d_4\left(c_{A^\nu}, 2k_2\right) G_2^a\left(\sqrt{R}\right)\left(\sqrt{2R} + k_4\|F\|_{H^m}\right)\right]^{\frac{1}{1-a}}\right)^{1-a} (2g(R))^a \\ &\leq \frac{1}{2} g(R) + \frac{1}{4} g(R)^{1-a}(2g(R))^a \leq g(R). \end{aligned}$$

Somit liegt w in $X_{(R,T_1)}$ und Lemma 3.20 ist bewiesen. □

Beweis zu Lemma 3.21: In diesem Beweis gehen wir analog zu [12], Beweis zu Lemma 5.3, vor.
Es seien $R \geq R_0$ und $T_1 = T_1(R)$ so, dass die Aussage von Lemma 3.20 gilt.
Weiter seien $v_1,\ v_2 \in X_{(R,T_1)}$ beliebig und dazu $w_1 = Sv_1$ und $w_2 = Sv_2$. Dann liegen w_1 und w_2 ebenfalls in $X_{(R,T_1)}$ und es gilt $L(v_1)w_1 = L(v_2)w_2$, $w_1(0,\cdot) = w_2(0,\cdot) = f$ in Ω und $Mw_1 = Mw_2 = 0$ in $[0,T_1] \times \partial\Omega$.
Damit gilt

$$\begin{aligned} & A^0(v_1)\partial_t\left(w_2 - w_1\right) + A^j(v_1)\partial_j\left(w_2 - w_1\right) + B(v_1)\left(w_2 - w_1\right) \\ = \ & \left(A^0(v_1) - A^0(v_2)\right)\partial_t w_2 + \left(A^j(v_1) - A^j(v_2)\right)\partial_j w_2 + \left(B(v_1) - B(v_2)\right) w_2 =: K. \end{aligned}$$

Die übliche Methode zum Erhalten von Energieabschätzungen liefert daraus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega A^0(v_1)\left(w_2 - w_1\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\int_\Omega A^j(v_1)\left(w_2 - w_1\right)^2 \\ = \ & -\int_\Omega \left(B(v_1) - \frac{1}{2}\nabla A^0(v_1)\partial_t v_1 - \frac{1}{2}\nabla A^j(v_1)\partial_j v_1\right)\left(w_2 - w_1\right)^2 + \int_\Omega K\left(w_2 - w_1\right). \end{aligned}$$

Die Randmatrix $A^\nu(t,x,v)$ ist auf dem Nullraum von M positiv definit, falls $x \in \partial\Omega$ und $Mv = 0$.
Aus $M\left(w_2 - w_1\right) = 0$ und $Mv_1 = 0$ folgt deshalb, dass der Term $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\int_\Omega A^j(v_1)\left(w_2 - w_1\right)^2$ nichtnegativ ist und daher für die weiteren Abschätzungen vernachlässigt werden darf.
Nach Integration über $(0,t)$ für $t \in (0,T_1]$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_\Omega A^0(v_1)\left(w_2 - w_1\right)^2(t) \leq & \int_0^t \int_\Omega 2K\left(w_2 - w_1\right)(t)\,\mathrm{d}t \\ & - \int_0^t \int_\Omega \left(2B(v_1) - \nabla A^0(v_1)\partial_t v_1 - \nabla A^j(v_1)\partial_j v_1\right)\left(w_2 - w_1\right)^2(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Aus Lemma B.7 folgt $\nabla A^0(v_1) \in X_{m-1}([0,T_1],\Omega) \subset X_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}([0,T_1],\Omega)$ und

$$\begin{aligned} |||\nabla A^0(v_1)|||_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1} & \leq c\|\nabla A^0\|_{C^{m-1}(\Omega\times(|\cdot|\leq|||v_1|||_{m-1}))} \cdot \left(1 + |||v_1|||_{m-1}^{m-1}\right) \\ & \leq c\|A^0\|_{C^m\left(\Omega\times\left(|\cdot|\leq\sqrt{R}\right)\right)} \cdot \left(1 + \sqrt{R^{m-1}}\right) \end{aligned}$$

und damit aus Lemma B.6

$$|||\nabla A^0(v_1)\,\partial_t v_1|||_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1} \leq c\|A^0\|_{C^m\left(\Omega\times\left(|\cdot|\leq\sqrt{R}\right)\right)} \cdot \left(1 + \sqrt{R^{m-1}}\right) \cdot \sqrt{R}.$$

Analoge Abschätzungen gelten auch für die A^j- bzw. B-Terme, so dass wir aus (3.50) zusammen mit (2.47)

$$c_{A^0}\cdot\|w_2(t)-w_1(t)\|_{L^2}^2 \leq 2\Gamma\cdot\int_0^t \|w_2(t)-w_1(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+\int_0^t \|w_2(t)-w_1(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+\int_0^t \|K(s)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s$$

für eine von v_1 unabhängige Konstante $\Gamma = \Gamma(R)$ erhalten.
Darauf wenden wir das Lemma von Gronwall, Satz 1.3, an, das uns die Abschätzung

$$\|w_2(t) - w_1(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{\frac{1}{c_{A^0}}(\Gamma+1)t}\int_0^t \|K(s)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \tag{3.51}$$

liefert.
Mit Hilfe des Hauptsatzes der Integralrechnung können wir K aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von A^0, A^j und B zu

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \left(\nabla A^0\left(v_2 + s\left(v_1 - v_2\right)\right)\partial_t w_2 + \nabla A^j\left(v_2 + s\left(v_1 - v_2\right)\right)\partial_j w_2\right)\cdot\left(v_1 - v_2\right)\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^1 \nabla B\left(v_2 + s\left(v_1 - v_2\right)w_2\right)\cdot\left(v_1 - v_2\right)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

umformen. Es gilt

$$\begin{aligned} &\left\|\int_0^1 \nabla A^0\left(v_2 + s\left(v_1 - v_2\right)\right)\partial_t w_2\cdot\left(v_1 - v_2\right)\,\mathrm{d}s\right\|_{L^2} \\ &\leq \left\|\sup_{s\in[0,1]} \nabla A^0\left(v_2 + s\left(v_1 - v_2\right)\right)\right\|_{C^0}\cdot\left\|\partial_t w_2\left(v_1 - v_2\right)\right\|_{L^2} \end{aligned}$$

und mit dem Sobolevschen Einbettungssatz und Lemma B.7

$$\begin{aligned} &\left\|\nabla A^0\left(v_2 + s\left(v_1 - v_2\right)\right)\right\|_{C^0} \leq d|||\nabla A^0\left(v_2 + s\left(v_1 - v_2\right)\right)|||_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1} \\ &\leq c\|\nabla A^0\|_{C^{m-1}(\Omega\times(|\cdot|\leq 2(|||v_2|||_{m-1}+|||v_1|||_{m-1})))}\cdot\left(1 + \left(2\left(|||v_2|||_{m-1} + |||v_1|||_{m-1}\right)\right)^{m-1}\right) \\ &\leq c\|A^0\|_{C^m\left(\Omega\times\left(|\cdot|\leq 8\sqrt{R}\right)\right)}\cdot\left(1 + \left(8\sqrt{R}\right)^{m-1}\right). \end{aligned}$$

Analoge Abschätzungen gelten auch für die A^j- bzw. B-Terme.
Damit und mit Lemma B.6 kann $\|K\|_{L^2}^2$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} \|K\|_{L^2}^2 &\leq c\|A^0, A^j, B\|^2_{C^m\left(|\cdot|\leq 8\sqrt{R}\right)}\cdot\left(1 + \left(8\sqrt{R}\right)^{m-1}\right)^2\cdot g^2(R)\cdot\|v_1 - v_2\|_{L^2}^2 \\ &=: \Lambda\cdot\|v_1 - v_2\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

für eine allein von R und den Koeffizientenfunktionen abhängige Konstante $\Lambda > 0$.

Damit folgt aus (3.51)

$$
\begin{aligned}
\|w_2(t) - w_1(t)\|_{L^2}^2 &\leq \Lambda e^{\frac{1}{c_{A^0}}(\Gamma+1)t} \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}s \\
&\leq \Lambda e^{\frac{1}{c_{A^0}}(\Gamma+1)t} \cdot t \cdot \sup_{s\in(0,t)} \|v_1(s) - v_2(s)\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

Falls $T_1 > 0$ nun so klein ist, dass $\Lambda e^{\frac{1}{2c_{A^0}}(\Gamma+1)T_1} \cdot \sqrt{T_1} =: k < 1$ gilt, erhalten wir damit

$$
|||w_2 - w_1|||_{0,T_1} \leq k|||v_2 - v_1|||_{0,T_1},
$$

womit Lemma 3.21 bewiesen ist. □

Damit ist auch Satz 1.6 bewiesen.
Zu bemerken ist, dass aus der Wahl von T_1 in Lemma 3.20 und Lemma 3.21 ersichtlich ist, von welchen Systemeigenschaften die Länge T des Existenzintervalls abhängt.

Anhang A

Anhang zu Kapitel 2

Beweis zu Lemma 2.20

Beweis: Nach Definition von E gibt es offensichtlich ein $c_7 > 0$ mit $c_7 E(t) \leq |||u(t)|||_2^2$ und es gilt

$$|||u(t)|||_2^2 \leq \Gamma \cdot E(t) + \int_0^1 q_x^2 + \varphi_x^2 + q_{xt}^2 + \varphi_{xt}^2 + q_{xx}^2 + \varphi_{xx}^2 \,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Um (i) zu zeigen, schätzen wir die Summanden des Integrals einzeln gegen $E(t)$ ab. Mit den Abschätzungen (2.82) und (2.87) gilt schon

$$\int_0^1 \varphi_x^2 + \varphi_{xt}^2 \,\mathrm{d}x \leq \Gamma \cdot \big(1 + \alpha^2(t)\big) \cdot E(t). \tag{1.2}$$

Aus Gleichung (2.75) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_x^2 \,\mathrm{d}x &\leq \Gamma \int_0^1 \varphi_t^2 + (q\varphi_x)^2 + q^4 + r^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \Gamma \cdot \big(1 + \alpha^2(t)\big) \cdot E(t) + \Gamma \cdot R_1(t). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Gleichung (2.80) liefert zusammen mit (1.2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_{xt}^2 \,\mathrm{d}x &\leq \Gamma \int_0^1 \varphi_{tt}^2 + \varphi_t^4 + (q\varphi_x\varphi_t)^2 + (q_t\varphi_x)^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \Gamma \int_0^1 (q\varphi_{xt})^2 + \big(q^2\varphi_t\big)^2 + (qq_t)^2 + r_t^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \Gamma \cdot \big(1 + \alpha^2(t) + \alpha^4(t)\big) \cdot E(t) + \Gamma \cdot R_1(t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Um die beiden übrigen Terme abzuschätzen leiten wir (2.74) und (2.75) nach x ab

$$0 = A_x q_t + A q_{xt} + B_x q + B q_x + \varphi_{xx} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} r_x &= q_{xx} + H_x \varphi_t + H \varphi_{xt} + E_x q \varphi_x \\ &\quad + E q_x \varphi_x + E q \varphi_{xx} + F_x q^2 + 2F q q_x \end{aligned} \tag{1.6}$$

und erhalten schließlich aus Gleichung (1.5) zusammen mit (1.3) und (1.4)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{xx}^2 \,\mathrm{d}x &\leq \Gamma \int_0^1 q_{xt}^2 + q_x^2 + (q_t \varphi_x)^2 + (q\varphi_x)^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \Gamma \cdot \big(1 + \alpha^2(t) + \alpha^4(t)\big) \cdot E(t) + \Gamma \cdot R_1(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

und aus Gleichung (1.6) zusammen mit (1.2) und (1.7)

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_{xx}^2 \,\mathrm{d}x &\leq \Gamma \int_0^1 \varphi_{xt}^2 + (q_x \varphi_x)^2 + (\varphi_x \varphi_t)^2 + (\varphi_{xx} q)^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \Gamma \int_0^1 \big(q\varphi_x^2\big)^2 + (q q_x)^2 + \big(q^2 \varphi_x\big)^2 + r_x^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \Gamma \cdot \big(1 + \alpha^2(t) + \alpha^4(t) + \alpha^6(t)\big) \cdot E(t) + \Gamma \cdot \big(1 + \alpha^2(t)\big) \cdot R_1(t). \end{aligned} \tag{1.8}$$

(1.2), (1.3), (1.4), (1.7), und (1.8) eingesetzt in (1.1) zeigen, dass es ein $\Gamma > 0$ gibt mit

$$|||u(t)|||_2^2 \leq \Gamma \left(1 + \alpha^2(t) + \alpha^4(t) + \alpha^6(t)\right) \cdot E(t) + \Gamma \cdot \big(1 + \alpha^2(t)\big) \cdot R_1(t).$$

Wegen $\|u(t)\|_{H^2}^2 + R_1(t) \leq 1$ und folgt daraus mit Lemma 2.15 $|||u(t)|||_2^2 \leq \Gamma \cdot 4 \max\{1, c_1^6\} \cdot E(t) + \Gamma \cdot 2 \max\{1, c_1^2\} \cdot R_1(t)$, womit (i) bewiesen ist.
In (ii) ist die erste Ungleichung trivial und es gilt

$$|||u(t)|||_2^2 \leq \|u(t)\|_{H^2}^2 + \int_0^1 q_t^2 + \varphi_t^2 + q_{xt}^2 + \varphi_{xt}^2 + q_{tt}^2 + \varphi_{tt}^2 \,\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$

Analog zum Beweis von (i) erhalten wir aus (2.74) und (2.75)

$$\int_0^1 q_t^2 \,\mathrm{d}x \leq \Gamma \|u(t)\|_{H^2}^2 \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \varphi_t^2 \,\mathrm{d}x \leq \Gamma \left(1 + \alpha^2(t)\right) \cdot \|u(t)\|_{H^2}^2 + \Gamma \cdot R_1(t)$$

und damit aus (1.5) und (1.6)

$$\int_0^1 q_{xt}^2 + \varphi_{xt}^2 \,\mathrm{d}x \leq \Gamma \left(1 + \alpha^2(t) + \alpha^4(t)\right) \cdot \|u(t)\|_{H^2}^2 + \Gamma \cdot R_1(t).$$

Diese Abschätzungen liefern zusammen mit (2.79) und (2.80)

$$\int_0^1 q_{tt}^2 \,\mathrm{d}x \leq \Gamma \left(1 + \alpha^2(t) + \alpha^4(t)\right) \cdot \|u(t)\|_{H^2}^2 + \Gamma \cdot R_1(t) \qquad \text{und}$$

$$\int_0^1 \varphi_{tt}^2 \,\mathrm{d}x \leq \Gamma \left(1 + \alpha^2(t) + \alpha^4(t) + \alpha^6(t)\right) \cdot \|u(t)\|_{H^2}^2 + \Gamma \cdot (1 + \alpha(t)) \cdot R_1(t).$$

Wie in (i) folgt daraus zusammen mit Lemma 2.15, dass es ein $c_9 > 0$ gibt mit $|||u(t)|||_2^2 \leq c_9 \|u(t)\|_{H^2}^2$, womit (ii) bewiesen ist. $\square$

Anhang B

Anhang zu Kapitel 3

Definition der *Bessel-Potential-Räume* für $p = 2$

Aus Definition 2.3.1./1(c)(d), Theorem 2.3.2.(b),(d) und Theorem 2.3.3. in [18] folgt die Aussage.

Satz-Definition B.1
Es sei $-\infty < s < \infty$. Dann ist

$$H^s(\mathbb{R}^n) := H_2^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \equiv \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u \right] \right\|_{L^2} < \infty \right\}$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}$ ein Banachraum und für $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$W^{m,2}(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n),$$

wobei die Normen $\|\cdot\|_{W^{m,2}(\mathbb{R}^n)}$ und $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ äquivalent sind.

Hierbei bezeichne $\mathscr{S}'$, wie üblich, den Raum der temperierten Distributionen und $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf diesem Raum.
Analog zu Definition 4.2.1./1 in [18] definieren wir für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Satz-Definition B.2
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $-\infty < s < \infty$. Dann ist

$$H^s(\Omega) := \left\{ u \in \mathscr{S}'(\Omega) : \text{es gibt ein} \quad g \in H_2^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad g_{|\Omega} = u \quad \text{im distributionellen Sinn} \right\}$$

bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf_{\substack{g_{|\Omega} = u \\ g \in H_2^s(\mathbb{R}^n)}} \|g\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}$$

vollständig[1] *und für* $m \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Nützliche Ungleichungen

Lemma B.3

Es seien $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet und* $u \in X_m([0,T],\Omega)$ *so, dass* $\mathrm{supp}(u) \cap \partial\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ *gilt.*
Dann gibt es zu jedem $\rho > 0$ *eine Konstante* $\Gamma_5 = \Gamma_5\left(\frac{1}{\rho}, \Omega, m\right) > 0$, *so dass*

$$\sum_{\substack{|\alpha| \le m, \\ \alpha_0 + \alpha_n \le m-1}} \|D^\alpha u\|_{L^2} \le \rho \sum_{i=0}^{m-1} \|\partial_t^i \partial_n^{m-i} u\|_{L^2} + \Gamma_5 \left(|||u|||_{m,tan} + |||u|||_{m-1}\right)$$

gilt.

Beweis: Um Lemma B.3 zu zeigen benötigen wir die folgende Aussage.

Behauptung B.4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet, das die gleichmäßige Kegeleigenschaft*[2] *besitzt.*
Zu $\varepsilon > 0$ *und* $k \in \mathbb{N}$ *gibt es ein* $c = c\left(\frac{1}{\varepsilon}, \Omega, k\right) > 0$, *so dass für alle* $u \in H^k(\Omega)$ *die Abschätzung*

$$\sum_{\substack{|\alpha| \le k, \\ \alpha_n \le k-1}} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \le \varepsilon \|\partial_n^k u\|_{L^2}^2 + c \left(\sum_{\substack{|\beta| = k, \\ \beta_n = 0}} \|D^\beta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{k-1}}^2 \right) \tag{2.1}$$

gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $u \in H^k(\Omega)$. Dazu sei $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$ mit $f_{|\Omega} = u$ und $\mathcal{F}[f](\cdot) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot} f(x)\, dx$ die Fouriertransformierte zu f.
Die Existenz einer solchen Funktion f sichert uns Theorem 4.2.3 in [18].
Zur übersichtlicheren Darstellung sei außerdem für $t \le k$

$$\Lambda(k,t) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = k, \alpha_n = t\}.$$

[1] siehe [18], Seite 310, Remark 1.
[2] siehe [1], 4.8

Dann folgt mit dem Satz von Plancherel[3]

$$\sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ \alpha_n\le k-1}} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{H^{k-1}}^2 + \sum_{\substack{|\alpha|=k,\\ \alpha_n\le k-1}} \|\mathcal{F}[D^\alpha f]\|_{L^2}^2 = \|f\|_{H^{k-1}}^2$$

$$+\sum_{t=0}^{k-1}\sum_{\alpha\in\Lambda(k,t)}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi_1|^{2\alpha_1}\cdots|\xi_{n-1}|^{2\alpha_{n-1}}|\xi_n|^{2t}\cdot\underbrace{(2\pi)^{-n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi x}f(x)\,dx\right|^2}_{=:I(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{2.2}$$

Allgemein gilt

$$\sum_{\alpha\in\Lambda(k,t)}|\xi_1|^{2\alpha_1}\cdots|\xi_{n-1}|^{2\alpha_{n-1}}\le\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_{n-1}|^2\right)^{k-t},$$

womit

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k,\\ \alpha_n\le k-1}}\|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \;\le\; \sum_{t=0}^{k-1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_{n-1}|^2\right)^{k-t}|\xi_n|^{2t}\cdot I(\xi)\,d\xi \tag{2.3}$$

folgt.
Für $1\le t\le k-1$, $p:=\frac{k}{t}$, $q:=\frac{k}{k-t}$ und für alle $\gamma>0$ liefert die Youngsche Ungleichung

$$\begin{aligned}|\xi_n|^{2t}\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_{n-1}|^2\right)^{k-t} &= \gamma^{\frac{1}{p}}|\xi_n|^{\frac{2k}{p}}\cdot\gamma^{-\frac{1}{p}}\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_{n-1}|^2\right)^{\frac{k}{q}}\\ &\le \frac{\gamma}{p}|\xi_n|^{2k}+\frac{\gamma^{-\frac{q}{p}}}{q}\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_{n-1}|^2\right)^k\\ &\le \gamma|\xi_n|^{2k}+\gamma^{-\frac{t}{k-t}}\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_{n-1}|^2\right)^k.\end{aligned}$$

Dies setzen wir in (2.3) ein und erhalten mit der Bezeichnung $c_1=c_1\left(\frac{1}{\gamma},k\right):=\sum_{t=0}^{k-1}\gamma^{-\frac{t}{k-t}}$ und einer von k abhängigen Konstanten $c_2>0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{|\alpha|=k,\\ \alpha_n\le k-1}}\|D^\alpha f\|_{L^2}^2 &\le \gamma k\cdot\int_{\mathbb{R}^n}|\xi_n|^{2k}\cdot I(\xi)\,\mathrm{d}\xi+c_1\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_{n-1}|^2\right)^k\cdot I(\xi)\,d\xi\\ &= \gamma k\cdot\|\partial_n^k f\|_{L^2}^2+c_1c_2\cdot\sum_{\substack{|\beta|=k\\ \beta_n=0}}\|D^\beta f\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Theorem 4.2.3 in [18] garantiert die Existenz zweier von k und Ω abhängiger Konstanten

[3] siehe [1], 7.61

$c_3, c_4 > 0$, so dass aus (2.2) und (2.4)

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ \alpha_n\le k-1}} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 &\le c_3 \sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ \alpha_n\le k-1}} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2(\Omega) \\
&\le c_3\|f\|^2_{H^{k-1}(\mathbb{R}^n)} + c_3\gamma k \cdot \|\partial_n^k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + c_1c_2c_3 \cdot \sum_{\substack{|\beta|=k\\ \beta_n=0}} \|D^\beta f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\le c_3c_4\|u\|^2_{H^{k-1}(\Omega)} + c_3c_4\gamma k \cdot \|\partial_n^k u\|^2_{L^2(\Omega)} + c_1c_2c_3c_4 \cdot \sum_{\substack{|\beta|=k\\ \beta_n=0}} \|D^\beta u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

folgt.
Wir wählen nun $\gamma := \frac{\varepsilon}{c_3c_4k}$ und definieren $c = c\left(\frac{1}{\varepsilon}, k, \Omega\right)$ entsprechend. Damit folgt

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k,\\ \alpha_n\le k-1}} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \le \varepsilon\|\partial_n^k u\|^2_{L^2} + c\left(\sum_{\substack{|\beta|=k,\\ \beta_n=0}} \|D^\beta u\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{H^{k-1}}\right),$$

womit Behauptung B.4 gezeigt ist. (□)

Die Höldersche Ungleichung liefert eine von m abhängige Konstante $c_5 > 0$, so dass

$$\left(\sum_{\substack{|\alpha|\le m,\\ \alpha_0+\alpha_n\le m-1}} \|D^\alpha u\|_{L^2}\right)^2 \le c_5^2 \sum_{\substack{|\alpha|\le m,\\ \alpha_0+\alpha_n\le m-1}} \|D^\alpha u\|^2_{L^2} = c_5^2 \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{|\alpha|\le m-i,\\ \alpha_0=0,\\ \alpha_n\le m-i-1}} \|D^\alpha \partial_t^i u\|^2_{L^2}$$

gilt. Daraus folgt mit Behauptung B.4 für $\sqrt{\varepsilon} := \frac{\rho}{c_5}$ und entsprechendem $\Gamma_5 > 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{|\alpha|\le m,\\ \alpha_0+\alpha_n\le m-1}} \|D^\alpha u\|_{L^2} \\
&\le c_5\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \|\partial_n^{m-i}\partial_t^i u\|_{L^2} + c_5 \sum_{i=0}^{m-1} c\left(\frac{1}{\varepsilon}, \Omega, m-i\right) \sum_{\substack{|\beta|=m-i,\\ \beta_0=\beta_n=0}} \|D^\beta\partial_t^i u\|_{L^2} + \|\partial_t^i u\|_{H^{m-i-1}} \\
&\le \rho \sum_{i=1}^{m} \|\partial_t^{m-i}\partial_n^i u\|_{L^2} + \Gamma_5\left(|||u|||_{m,tan} + |||u|||_{m-1}\right),
\end{aligned}$$

womit Lemma B.3 bewiesen ist. □

Lemma B.5
Es sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das die gleichmäßige C^m-Regularitätseigenschaft besitzt.
Weiter seien $f, g \in X_m([0,T], \Omega)$, $|\alpha|$, $|\beta| < m$, $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha| \leq s_1 - 1$, $|\beta| \leq s_2 - 1$ und $|\alpha| + |\beta| + \frac{n}{2} < s_1 + s_2$.
Dann gibt es Konstanten a_1, a_2 mit $0 < a_i < 1$ so, dass die Abschätzung

$$\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2(\Omega)} \leq c|||f|||_{s_1}^{a_1}|||f|||_{s_1-1}^{1-a_1}|||g|||_{s_2}^{a_2}|||g|||_{s_2-1}^{1-a_2}$$

gilt.

Beweis: Die folgende Abschätzung ist ein Spezialfall der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung aus Theorem 10.1 in [6]:
Es seien $j \in \mathbb{N}$ mit $j < m$, $\frac{j}{m} < a < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{j-am}{n}$, $m - j - \frac{n}{2} < 0$ und D^j beinhalte keine Zeitableitungen.
Dann gibt es ein $c > 0$, so dass

$$|D^j h|_{L^p(\Omega)} \leq c\|h\|_{H^m(\Omega)}^a \|h\|_{L^2(\Omega)}^{1-a}$$

gilt. Hierbei sei $|D^j h|_{L^p(\Omega)}^p := \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha h\|_{L^p(\Omega)}^p$
Wir setzen nun $j_1 := |\alpha| - \alpha_0$ bzw. $j_2 := |\beta| - \beta_0$ und $m_1 := s_1 - \alpha_0$ bzw. $m_2 := s_2 - \beta_0$.
Wir werden zeigen, dass es dazu $2 < p_1, p_2 < \infty$ mit $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2}$ und $\frac{|\alpha|-\alpha_0}{s_1-\alpha_0} < a_1 < 1$ bzw. $\frac{|\beta|-\beta_0}{s_2-\beta_0} < a_2 < 1$ gibt, so dass die Voraussetzungen der obigen Abschätzung erfüllt sind.
Sind diese gefunden, kann mithilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2} &\leq \|D^\alpha f\|_{L^{p_1}} \|D^\beta g\|_{L^{p_2}} \\
&\leq c\|\partial_t^{\alpha_0} f\|_{H^{s_1-\alpha_0}}^{a_1} \|\partial_t^{\alpha_0} f\|_{L^2}^{1-a_1} \|\partial_t^{\beta_0} g\|_{H^{s_2-\beta_0}}^{a_2} \|\partial_t^{\beta_0} g\|_{L^2}^{1-a_2} \\
&\leq c|||f|||_{s_1}^{a_1}|||f|||_{s_1-1}^{1-a_1}|||g|||_{s_2}^{a_2}|||g|||_{s_2-1}^{1-a_2}
\end{aligned}$$

gefolgert werden, womit Lemma B.5 bewiesen ist.
Wir zeigen, dass es a_1, a_2 mit

$$\frac{|\alpha| - \alpha_0}{s_1 - \alpha_0} < a_1 < 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|\beta| - \beta_0}{s_2 - \beta_0} < a_2 < 1$$

gibt, so dass für $p_1 = p_1(a_1)$ und $p_2 = p_2(a_2)$ mit

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} + \frac{|\alpha| - \alpha_0 - a_1(s_1 - \alpha_0)}{n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2} + \frac{|\beta| - \beta_0 - a_2(s_2 - \beta_0)}{n}$$

gilt:

(i)
$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{n}(|\alpha|-\alpha_0-a_1(s_1-\alpha_0)+|\beta|-\beta_0-a_2(s_2-\beta_0))+1=\frac{1}{2}$$

und

(ii)

$$-\frac{1}{2}<\frac{|\alpha|-\alpha_0-a_1(s_1-\alpha_0)}{n}<0 \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}<\frac{|\beta|-\beta_0-a_2(s_2-\beta_0)}{n}<0,$$

woraus $2<p_1,p_2<\infty$ und $0>m_1-j_1-\frac{n}{2}$ bzw. $0>m_2-j_2-\frac{n}{2}$ folgt.
Zu (i):
Wir definieren $H(a_1,a_2):=\frac{|\alpha|-\alpha_0-a_1(s_1-\alpha_0)+|\beta|-\beta_0-a_2(s_2-\beta_0)}{n}$.
Falls $a_1=a_2=1$, ist $H(a_1,a_2)=\frac{|\alpha|+|\beta|-(s_1+s_2)}{n}<-\frac{1}{2}$, da nach Voraussetzung $|\alpha|+|\beta|+\frac{n}{2}<s_1+s_2$.
Falls $a_1=\frac{|\alpha|-\alpha_0}{s_1-\alpha-0}$ und $a_2=\frac{|\beta|-\beta_0}{s_2-\beta_0}$, ist $H(a_1,a_2)=0>-\frac{1}{2}$.
Die Stetigkeit von H liefert uns deshalb zusammen mit dem Zwischenwertsatz einen Punkt $(a_1,a_2)\in\left(\frac{|\alpha|-\alpha_0}{s_1-\alpha_0},1\right)\times\left(\frac{|\beta|-\beta_0}{s_2-\beta_0},1\right)$ mit $H(a_1,a_2)=-\frac{1}{2}$. Damit ist (i) gezeigt.
Zu (ii):
Für die durch (i) bestimmten a_1,a_2 gilt $\frac{|\alpha|-\alpha_0-a_1(s_1-\alpha_0)}{n}$, $\frac{|\beta|-\beta_0-a_2(s_2-\beta_0)}{n}<0$ und $\frac{|\alpha|-\alpha_0-a_1(s_1-\alpha_0)}{n}+\frac{|\beta|-\beta_0-a_2(s_2-\beta_0)}{n}=-\frac{1}{2}$. Hieraus folgt (ii), womit Lemma B.5 bewiesen ist. $\square$

Lemma B.6
Es seien $f,g\in X_k([0,T],\Omega)$ und Ω besitze die in Lemma B.5 geforderten Eigenschaften. Falls $k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$ ist, gilt

(2.5)
$$|||fg|||_k\le c|||f|||_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}|||g|||_k$$

und falls $k\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2$ ist, gilt

(2.6)
$$|||fg|||_k\le c\left(|||f|||_k|||g|||_{k-1}+|||f|||_{k-1}|||g|||_k\right).$$

Beweis: Wir beweisen zuerst die Abschätzung (2.5).
Dazu seien $k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$ und $f,g\in X_k([0,T],\Omega)$.
Dann gibt es eine von k abhängige Konstante $c>0$ mit

(2.7)
$$|||fg|||_k\le c\sum_{|\alpha|+|\beta|\le k}\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2}.$$

Wir schätzen die Terme der Form $\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2}$ einzeln ab.
1. Fall: $|\beta|=k$: Der Sobolevsche Einbettungssatz liefert ein $s>0$ mit

$$\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2}\le\|f\|_{C^0}\|D^\beta g\|_{L^2}\le s|||f|||_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}|||g|||_k.$$

2. Fall: $|\alpha| = k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$: Wieder gilt mit dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2} \leq \|D^\alpha f\|_{L^2} \|g\|_{C^0} \leq s|||f|||_k |||g|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = s|||f|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} |||g|||_k.$$

3. Fall: $|\alpha| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ und $\beta < k$:
Mit $s_1 := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ und $s_2 := k$ ist Lemma B.5 anwendbar und liefert direkt

$$\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2} \leq c|||f|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} |||g|||_k.$$

Damit ist (2.5) bewiesen.
Um (2.6) zu beweisen seien nun $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ und $f, g \in X_k([0,T], \Omega)$.
Da (2.7) auch in diesem Fall gilt, gehen wir wie im Beweis zu (2.5) vor.
1. Fall: $|\beta| = k$:

$$\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2} \leq \|f\|_{C^0} \|D^\beta g\|_{L^2} \leq s|||f|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} |||g|||_k \leq s|||f|||_{k-1} |||g|||_k$$

2. Fall: $|\beta| = k - 1$:

$$\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2} \leq \|f\|_{C^1} \|D^\beta g\|_{L^2} \leq s|||f|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} |||g|||_{k-1} \leq s|||f|||_k |||g|||_{k-1}$$

3. Fall: $|\alpha| < k$ und $\beta < k - 1$:
Mit $s_1 := k$ und $s_2 := k - 1$ folgt aus Lemma B.5

$$\|(D^\alpha f)(D^\beta g)\|_{L^2} \leq c|||f|||_k |||g|||_{k-1}.$$

Indem nun α und β in den Fallunterscheidungen vertauscht werden, ist Lemma B.6 bewiesen.

$\square$

Lemma B.7
Es seien $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, $A \in C^m\left([0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^l\right)$ und $h \in X_m([0,T], \Omega)$ mit $h(t,x) \in \mathbb{R}^l$ für $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$.
Dann ist $A(h) \in X_m([0,T], \Omega)$ und es gibt eine von A und h unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$|||A(h)|||_m \leq c\|A\|_{C^m(\Omega \times (|\cdot| \leq c_1 |||h|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}))} \cdot (1 + |||h|||_m^m).$$

Falls $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ ist, gilt sogar

$$|||A(h)|||_m \leq c\|A\|_{C^m(\Omega \times (|\cdot| \leq c_1 |||h|||_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}))} \cdot \left(1 + |||h|||_{m-1}^{m-1}\right) (1 + |||h|||_m).$$

Beweis: Für $k \leq m$ ist $\partial_t^k A(h)$ eine Summe aus Vielfachen von Termen der Form

$$(\partial_t^a \partial_h^p A)\,(h) \cdot \partial_t^{b^{(1)}} h \cdots \partial_t^{b^{(p)}} h$$

mit $a + p \leq k$ und $a + \sum_{i=1}^p b^{(i)} = k$.
Analog erkennt man, dass $D^\gamma A(h)$ für jeden Multiindex γ mit $|\gamma| \leq m$ eine Summe aus Vielfachen von Termen der Form

$$\left(D_{t,x}^\alpha \partial_h^p A\right)(h) \cdot D_{t,x}^{\beta^{(1)}} h \cdots D_{t,x}^{\beta^{(p)}} h$$

mit $|\alpha| + p \leq |\gamma|$ und $\alpha + \sum_{i=1}^p \beta^{(i)} = \gamma$ ist.
Somit besteht $|||A(h)|||_m^2$ ausschließlich aus Summanden der Gestalt

$$c_{\alpha,\beta} \| \left(D_{t,x}^\alpha \partial_h^p A\right)(u) \cdot D_{t,x}^{\beta^{(1)}} h \cdots D_{t,x}^{\beta^{(p)}} h\|_{L^2}^2$$

für $|\alpha| + p \leq m$, $|\alpha| + \sum_{i=1}^p |\beta^{(i)}| \leq m$ und von α und β abhängigen Konstanten $c_{\alpha,\beta} > 0$.
Für jeden dieser Summanden und für alle $t \in [0,T]$ gilt mit einer von m abhängigen Konstaten c_m die Abschätzung

$$\begin{aligned} & c_{\alpha,\beta} \| \left(\left(D_{t,x}^\alpha \partial_h^p A\right)(h) \cdot D_{t,x}^{\beta^{(1)}} h \cdots D_{t,x}^{\beta^{(p)}} h\right)(t)\|_{L^2} \\ \leq\ & c_m \|A(t)\|_{C^m(\Omega \times (|\cdot| \leq \|h\|_{C^0}))} \cdot |||h^p(t)|||_m. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wir zeigen mittels Induktion nach p, dass für $0 \leq p \leq m$

$$|||h^p|||_m \leq \begin{cases} c|||h|||_m^p, & \text{falls} \quad m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \\ c|||h|||_{m-1}^{p-1} |||h|||_m, & \text{falls} \quad m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \end{cases}$$

gilt.

$p = 0$: Für $p = 0$ gilt die Aussage mit $c := \|1\|_{L^2}$, da $|||h|||_m^0 = 1$ und $\frac{|||h|||_m}{|||h|||_{m-1}} \geq 1$ ist.

$p \rightsquigarrow p+1$: Falls $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ ist, gilt mit (2.5) und der Induktionsvoraussetzung

$$|||h^{p+1}|||_m = |||h \cdot h^p|||_m \leq c|||h|||_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} |||h|||_m^p = |||h|||_m^{p+1}.$$

Für $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$ folgt der Induktionsschritt auf analoge Weise aus (2.6).

Wegen $|||h|||_m^p \leq |||h|||_m^m$, falls $|||h|||_m > 1$, und $|||h|||_m^p \leq 1$, falls $|||h|||_m \leq 1$, folgt damit aus (2.8) die Behauptung. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Adams, R.A. und Fournier, J.J.F. *Sobolev spaces.* Elsevier Ltd, (2003).

[2] Alt, H.W. *Lineare Funktionalanalysis.* Springer, (2002).

[3] Chandrasekharaiah, DS. Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature. *Appl. Mech. Rev.*, **51**:705–729, (1998).

[4] Coleman, B.D., Fabrizio, M. und Owen D.R. On the thermodynamics of second sound in dielectric crystals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **80**:135–158, (1982).

[5] Coleman, B.D., Hrusa, W.J. und Owen, D.R. Stability of equilibrium for a nonlinear hyperbolic system describing heat propagation by second sound in solids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **94**:267–289, (1986).

[6] Friedman, A. *Partial differential equations.* Robert E. Krieger Publishing Company, (1976).

[7] Ikawa, M. Mixed problem for a hyperbolic system of the first order. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **7**:427–454, (1971/72).

[8] Leis, R. *Initial boundary value problems in mathematical physics.* BG Teubner, John Wiley & Sons., (1986).

[9] Majda, A. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables.* Springer, (1984).

[10] Milani, A.J. und Koksch, N.J. *An introduction to semiflows.* Chapman & Hall/CRC, (2005).

[11] Mosbacher, M., Dobler, V., Münzer, H.-J., Zimmermann, J., Solis, J., Boneberg, J. und Leiderer, P. Optical field enhancement effects in laser assisted particle removal. *Appl. Phys. A*, **72**:41–44, (1991).

[12] Racke, R. *Lectures on nonlinear evolution equations: Initial value problems.* Vieweg, (1992).

[13] Racke, R. Thermoelasticity with second sound - exponential stability in linear and nonlinear 1-d. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **25**:409–441, (2002).

[14] Rauch, J.B. und Massey, F.J. Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **189**:303–318, (1974).

[15] Renardy, M. und Rogers, R.C. *An introduction to partial differential equations.* Springer, (1993).

[16] Schochet, S. The compressible euler equations in a bounded domain: Existenz of solutions and the incompressible limit. *Commun. Math. Phys.*, **104**:49–75, (1986).

[17] Spicer, J.B. und Hurley, D.H. Epicentral and near epicenter surface displacements on pulsed laser irradiated metallic surfaces. *Appl. Phys. Lett.*, **86**:3561–3563, (1996).

[18] Triebel, H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* North-Holland Publishing Company, (1978).

[19] Messaoudi, S.A. und Said-Houari, B. Exponential stability in one-dimensional non-linear thermoelasticity with second sound. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **28**:205–232, (2004).

[20] Wang, X. und Xu, X. Thermoelastic wave induced by pulsed laser heating. *Appl. Phys. A*, **73**:107–114, (2001).